

FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre 2015

Guía 8 – Problema 4 (práctica del 18/11)

El problema 4 de la Guía 8 dice:

- Una partícula cargada efectúa un movimiento circular uniforme con frecuencia ω y radio a .
 - a) A partir de las fórmulas generales de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ de una carga en movimiento arbitrario, calcular los campos de radiación hasta orden ω^3 . Tenga en cuenta que necesitará calcular el tiempo retardado hasta orden a/c .
 - b) Encontrar los campos de radiación hasta el mismo orden en ω , pero esta vez calculando las contribuciones de los términos de radiación multipolares hasta el orden que sea necesario.
 - c) Comparar los dos resultados.

El problema general es determinar los campos de radiación de una carga que se mueve en una región acotada del espacio y estudiar cómo van apareciendo las correcciones relativistas. Para la carga en una órbita circular, su velocidad es ωa , y lo que se busca entonces es desarrollar los campos de radiación en potencias de $\omega a/c$. El primer término del desarrollo irá como ω^2 , debido a que la aceleración es proporcional a ω^2 . El problema pide avanzar hasta el siguiente término, que irá como ω^3 . Aquí estudiaremos el problema general de una carga en movimiento acotado y luego daremos algunos de los resultados para la carga en movimiento circular.

Los campos de *aceleración* de una carga que se mueve según la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ son

$$\mathbf{E}_{\text{acel}}(\mathbf{R}, t) = \frac{q}{c^2} \left[\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \ddot{\mathbf{r}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \right]_{t'},$$
$$\mathbf{B}_{\text{acel}}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{acel}}(\mathbf{R}, t), \quad (1)$$

donde

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}, \quad (2)$$

y donde todas las cantidades que dependen de la trayectoria de la carga, incluido el versor $\mathbf{n}$, están evaluadas en el tiempo retardado, determinado por la ecuación

$$c(t - t') = |\mathbf{R} - \mathbf{r}(t')|. \quad (3)$$

Supondremos que la posición de la carga está acotada por cierto radio a , tal que $r < a$.

Entenderemos por campo de *radiación* la expresión aproximada, a más bajo orden, del campo de aceleración cuando $R \rightarrow \infty$. En otras palabras, los términos del campo que decaen a lo sumo como R^{-1} ,

$$\mathbf{E}_{\text{acel}} = \mathbf{E}_{\text{rad}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right). \quad (4)$$

Notemos que

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{R}}{R} \right) = \frac{1}{R} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{R^2} \right). \quad (5)$$

y además

$$\mathbf{n} \approx \frac{1}{R}(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{R}}{R} \right) = \hat{R} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{R} \right). \quad (6)$$

De modo que el orden más bajo en potencias de R^{-1} termina siendo

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t) = \frac{q}{c^2 R} \hat{R} \times \left[\frac{(\hat{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \ddot{\mathbf{r}}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{R})^3} \right]_{t'}. \quad (7)$$

Veremos luego que esta expresión todavía oculta dependencias en R que decaen más rápidamente que R^{-1} .

Los objetivos ahora son tres: i) encontrar el límite no relativista de la expresión (7); ii), calcular la primera corrección relativista; iii) mostrar cuál es el método que permitiría obtener las correcciones siguientes. Finalmente, indicaremos cómo se relaciona esto con las aproximaciones multipolares. Los objetivos eran cuatro, no tres.

Entonces, la primera pregunta es: ¿cuál es la aproximación a más bajo orden en potencias de v/c para el campo de radiación de una carga en movimiento acotado? En la ec. (7) lo que importa aproximar es el término entre corchetes

$$\left[\frac{(\hat{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \ddot{\mathbf{r}}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{R})^3} \right]_{t'}, \quad (8)$$

el resto son factores constantes. Un desarrollo en potencias de v/c puede entenderse de dos maneras: como un desarrollo en potencias de v alrededor de $v = 0$, o como un desarrollo en potencias de c^{-1} alrededor de $c \rightarrow \infty$. Esta segunda de manera de pensarlo es tal vez la más recomendable. Ya veremos por qué.

Si se trata de obtener la aproximación a orden más bajo, a primera vista parecería que sólo hay una cosa por hacer: despreciar los dos factores $\boldsymbol{\beta}$ que aparecen en la expresión (8) y escribir

$$\left[\frac{(\hat{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \ddot{\mathbf{r}}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{R})^3} \right]_{t'} \approx \hat{R} \times \ddot{\mathbf{r}}(t'). \quad (9)$$

Entonces sería, provisionalmente,

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t) \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{R}, t) \stackrel{?}{=} \frac{q}{c^2 R} \hat{R} \times \left[\hat{R} \times \ddot{\mathbf{r}}(t') \right]. \quad (10)$$

Pero $\boldsymbol{\beta}$ no es la única cosa que tiende a cero en la expresión (8) cuando $c \rightarrow \infty$. Deberían preguntarse qué otro elemento esencial en el cálculo del campo de radiación es consecuencia de la velocidad finita de propagación

de la luz. Piensen esto: si la velocidad de la luz fuera infinita el tiempo retardado desaparece como tal, y sólo queda el tiempo t . En rigor, a más bajo orden la aproximación no relativista sería

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{R}, t) \stackrel{?}{=} \frac{q}{c^2 R} \hat{R} \times [\hat{R} \times \ddot{\mathbf{r}}(t)]. \quad (11)$$

No hemos llegado aún a la fórmula final, vamos a refinar una vez más esta expresión. Primero, notemos que al escribir los campos de radiación estamos haciendo un desarrollo en potencias de R^{-1} cuando $R \rightarrow \infty$ y que la ecuación que determina el tiempo retardado es

$$c(t - t') = |\mathbf{R} - \mathbf{r}(t')| = R - \hat{R} \cdot \mathbf{r}(t') + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right). \quad (12)$$

De aquí resulta

$$t' = t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}(t')}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{cR}\right). \quad (13)$$

Cuando $c \rightarrow \infty$, estrictamente hablando es $t = t'$. Ahora bien, pueden estar observando radiación generada a una distancia de 4 años luz producida por un fenómeno que apenas ha durado unos segundos. Sin embargo, nunca se les ocurriría decir que el tiempo de observación es igual al tiempo retardado. De hecho, en este caso es $t' \approx t - 4$ años. La velocidad de la luz será muy grande, pero la distancia de observación también. No hay que olvidar que, si bien estamos buscando el límite cuando $c \rightarrow \infty$, simultáneamente estamos asumiendo que $R \rightarrow \infty$, de modo que hay que decir algo acerca del cociente R/c . Lo más sencillo es decir que vale R/c . Es un retardo constante debido al tiempo que tarda la radiación en cubrir la distancia (constante) entre el origen y el punto $\mathbf{R}$. Observaciones que se hagan en la posición $\mathbf{R}$ a tiempo t dependerán de la trayectoria de la partícula a tiempo $t' \approx t - R/c$. Debido a que este tiempo va a aparecer con frecuencia, definiremos

$$t_R = t - \frac{R}{c}, \quad (14)$$

con lo que resulta

$$t' = t_R + \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}(t')}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Rc}\right). \quad (15)$$

Ahora sí, cuando $c \rightarrow \infty$, $t' \rightarrow t_R$. Finalmente, la aproximación a más bajo orden de los campos de radiación cuando $c \rightarrow \infty$ es

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t) \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{R}, t) = \frac{q}{c^2 R} \hat{R} \times [\hat{R} \times \ddot{\mathbf{r}}(t_R)]. \quad (16)$$

Hay una manera alternativa de pensar las aproximaciones al tiempo retardado. Si la posición de la carga está limitada por $r < a$, entonces la distancia $|\mathbf{R} - \mathbf{r}(t')|$ estará acotada por

$$R - a < |\mathbf{R} - \mathbf{r}(t')| < R + a. \quad (17)$$

La partícula nunca se aleja o se acerca al punto de observación una distancia que difiera de R en un valor mayor que a . Esto implica que el tiempo retardado estará acotado por

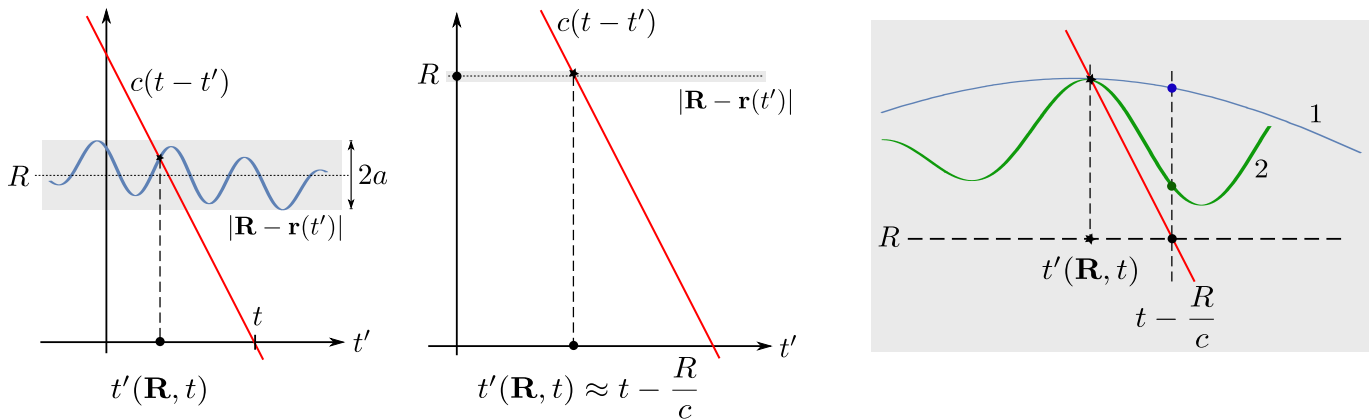
$$t_R - \frac{a}{c} < t' < t_R + \frac{a}{c}. \quad (18)$$

Aquí se ve que cuando $c \rightarrow \infty$ la acotación para t' se reduce a una igualdad, $t' \rightarrow t_R$. También es interesante notar que el error en t' no depende de R . El valor máximo del error es $\Delta t' = 2a/c$, y no tiene nada que ver con la distancia de observación, sino con las dimensiones típicas de la región en que se mueve la carga. El tiempo t_R fija la escala histórica de tiempo, por así decirlo. Pero lo verdaderamente importante es la escala de tiempo del movimiento de la carga. Que estemos observando a cuatro años de distancia un fenómeno al que le tomó unos segundos desarrollarse no implica necesariamente que podamos despreciar esos pocos segundos comparados con los cuatro años.

Conociendo $\Delta t'$, es posible dar un criterio para estimar cuándo la aproximación no relativista dejará de ser válida en el cálculo del tiempo retardado. Debemos pedir que durante un intervalo de tiempo a/c ninguna de las magnitudes que dependen de la trayectoria de la carga varíen apreciablemente. Supongamos que hay un tiempo típico τ asociado al movimiento de la carga. Por ejemplo, para una carga que gira alrededor del origen con frecuencia angular ω , el tiempo característico será ω^{-1} , y es el mismo tiempo típico para la posición, velocidad, aceleración y cualquier otra derivada de $\mathbf{r}(t')$ que pudiera aparecer en la expresión de los campos. Esto no necesariamente tiene que ser así siempre: la posición puede cambiar apreciablemente en una escala de tiempo, y la velocidad en otra, etc. En fin, supongamos que hay una única escala de tiempo τ . Entonces si

$$\frac{a}{c} \ll \tau, \quad (19)$$

el error al evaluar, no en el valor exacto de t' sino en t_R , las magnitudes asociadas a la trayectoria será despreciable. Notar que si la longitud típica del movimiento es a y el período es τ , entonces a/τ ha de ser la velocidad típica de la carga, $u = a/\tau$. El criterio (19) puede reescribirse bajo una forma más sugestiva como $u/c \ll 1$, que es lo mismo que decir que el movimiento es no relativista. Al final de todo, las aproximaciones al tiempo retardado desembocaron en el mismo criterio que usamos para despreciar los factores β en la ec. (7). La siguiente figura resume lo que hemos dicho acerca del cálculo del tiempo retardado.



La solución gráfica de la ecuación $c(t - t') = |\mathbf{R} - \mathbf{r}(t')|$. En la figura de la izquierda, R es comparable a la amplitud a del movimiento de la partícula. En la figura del centro, R es mucho mayor que a y t' es aproximadamente igual a $t_R = t - R/c$. Sin embargo, esta figura oculta lo que verdaderamente está pasando. En la figura de la derecha se muestra la región de las curvas que determina la solución exacta $t'(\mathbf{R}, t)$, y el valor aproximado $t_R = t - R/c$. La partícula asociada a la curva 1 se mueve lentamente y, así, usar el valor de t' exacto o el aproximado no dará lugar a una diferencia notable. En cambio, la partícula asociada a la curva 2 se mueve apreciablemente en el intervalo de tiempo que le toma a la luz atravesar una distancia del orden de a . La diferencia entre tomar el valor exacto de t' y el aproximado no será despreciable.

El mensaje que hay que llevarse de todo esto es: los factores β en la expresión

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t) = \frac{q}{c^2 R} \hat{R} \times \left[\frac{(\hat{R} - \beta) \times \ddot{\mathbf{r}}}{(1 - \beta \cdot \hat{R})^3} \right]_{t'} \quad (20)$$

no son los únicos responsables de los efectos relativistas. Más propiamente, los efectos relativistas son consecuencia de la velocidad finita de propagación de la luz, que es a la vez la máxima velocidad posible. La velocidad de la luz no sólo interviene en la definición de β sino de manera más fundamental en el cálculo del tiempo retardado. Buscar las aproximaciones no relativistas de la expresión general (20) requiere dos cosas muy distintas: por un lado, llevar la cuenta de los factores β , y por otro lado calcular el tiempo retardado como un desarrollo en $1/c$ y ver cómo se manifiestan en los campos las correcciones por la velocidad finita de propagación de la luz.

Vimos que a más bajo orden resulta el campo de la ec. (16). Para encontrar la primera corrección relativista empezaremos por ver cómo se determina el tiempo retardado hasta orden $1/c$. La ecuación que define el tiempo retardado para $R \gg a$ es la ec. (13). Usando la definición de t_R , queda

$$t' = t_R + \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}(t')}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Rc}\right). \quad (21)$$

Sin entrar en los detalles acerca de cómo resolver esta ecuación, la pregunta es: ¿de qué manera las correcciones al tiempo retardado afectarán las expresiones de los campos? Sea lo que sea, la solución para t' va a ser de la forma $t' = t_R + \delta t'$, donde, según la ec. (21), $\delta t'$ será de orden a/c , puesto que $|\mathbf{r}'|$ está acotado por a . Así, las funciones β y $\ddot{\mathbf{r}}$ que aparecen en las expresiones de los campos deberían ser evaluadas en $t_R + \delta t'$. Por ejemplo, quedaría

$$\dot{\mathbf{r}}(t') = \dot{\mathbf{r}}(t_R + \delta t') = \dot{\mathbf{r}}(t_R) + \ddot{\mathbf{r}}(t_R) \delta t' + \frac{1}{2} \dddot{\mathbf{r}}(t_R) \delta t'^2 + \dots \quad (22)$$

Notemos que los términos extra en la ec. (21), aquellos que van como potencias de R^{-1} , no van a jugar ningún papel: su efecto sobre $\delta t'$ será el de introducir correcciones por lo menos de orden R^{-1} , pero al expandir las funciones β y $\ddot{\mathbf{r}}$ en potencias de $\delta t'$, cualquiera de esas correcciones aportará factores de R^{-1} a la fórmula final para los campos, fórmula que ya contiene un factor de R^{-1} . Por ejemplo, sigamos la pista de los $\delta t'$ al evaluar la aceleración en $t_R + \delta t'$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t) &= \frac{q}{c^2 R} \hat{R} \times \left\{ \left[\frac{(\hat{R} - \beta)}{(1 - \beta \cdot \hat{R})^3} \right]_{t'} \times \ddot{\mathbf{r}}(t_R + \delta t') \right\} \\ &\approx \frac{q}{c^2 R} \hat{R} \times \left\{ \left[\frac{(\hat{R} - \beta)}{(1 - \beta \cdot \hat{R})^3} \right]_{t'} \times [\ddot{\mathbf{r}}(t_R) + \delta t' \dddot{\mathbf{r}}(t_R)] \right\} \\ &= \frac{q}{c^2 R} \hat{R} \times \left\{ \left[\frac{(\hat{R} - \beta)}{(1 - \beta \cdot \hat{R})^3} \right]_{t'} \times \ddot{\mathbf{r}}(t_R) \right\} + \frac{q}{c^2 R} \delta t' \hat{R} \times \left\{ \left[\frac{(\hat{R} - \beta)}{(1 - \beta \cdot \hat{R})^3} \right]_{t'} \times \dddot{\mathbf{r}}(t_R) \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

Si conserváramos en $\delta t'$ correcciones de orden R^{-1} , el último término daría lugar a correcciones de orden R^{-2} en el campo. Por definición los campos de radiación son los que van como R^{-1} , así que todos esos términos adicionales serán irrelevantes.

Todo esto significa que la ecuación que necesitamos resolver es mucho más simple que la que escribimos al comienzo. A los efectos prácticos, el tiempo retardado para el campo de radiación, a todo orden en c^{-1} , se determina a partir de la ecuación

$$t' = t_R + \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}(t')}{c}. \quad (24)$$

Lo que buscamos es una solución de la forma

$$t' = t_R + \frac{a_1}{c} + \frac{a_2}{c^2} + \dots \quad (25)$$

Vamos a resolver sólo los primeros términos. Podríamos reemplazar este desarrollo en la ec. (24), calcular la serie de Taylor y despejar orden a orden en c . Otra forma de hacerlo es por aproximaciones sucesivas. La aproximación de orden cero es $t' \approx t_R$. Si este valor se reemplaza en el miembro de la derecha en la ec. (24) se obtiene la aproximación de orden uno,

$$t' \approx t_R + \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}(t_R)}{c}. \quad (26)$$

En los cálculos que hagamos luego no vamos a necesitar más que eso. Pero, ya que estamos, el siguiente término, que se obtiene reemplazando la aproximación de orden uno en el segundo miembro de la ecuación original y expandiendo hasta orden c^{-2} , es:

$$\begin{aligned} t' &\approx t_R + \frac{1}{c} \hat{R} \cdot \mathbf{r} \left(t_R + \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}(t_R)}{c} \right), \\ &\approx t_R + \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}(t_R)}{c} + \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}(t_R)}{c^2} \hat{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t_R). \end{aligned} \quad (27)$$

Volviendo a los campos. Ahora trataremos de escribir la primera corrección relativista. En primer lugar, hay que conservar en la expresión (20) términos de hasta orden β , que antes despreciamos. Para esos términos será suficiente usar $t' = t_R$. En segundo lugar, en los términos de orden cero en β hay que usar la aproximación de orden uno para t' . Así resulta

$$\begin{aligned} \left[\frac{(\hat{R} - \boldsymbol{\beta}) \times \ddot{\mathbf{r}}}{(1 - \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'} &\approx \hat{R} \times \ddot{\mathbf{r}} \left(t_R + \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}(t_R)}{c} \right) + \left[3 \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}(t_R) \hat{R} - \boldsymbol{\beta}(t_R) \right] \times \ddot{\mathbf{r}}(t_R), \\ &\approx \left\{ \hat{R} \times \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}}{c} \hat{R} \times \ddot{\mathbf{r}} + \left[3 (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \hat{R} - \boldsymbol{\beta} \right] \times \ddot{\mathbf{r}} \right\}_{t_R} \end{aligned} \quad (28)$$

En la última expresión, todas las funciones están evaluadas en t_R . El primer término es la aproximación de orden cero que ya habíamos obtenido. Los otros dos términos son de orden c^{-1} , habida cuenta de que $\beta = \dot{\mathbf{r}}/c$. Finalmente, el campo de radiación incluyendo la primera corrección relativista es

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t) \approx \mathbf{E}_1(\mathbf{R}, t) = \frac{q}{c^2 R} \hat{R} \times \left\{ \hat{R} \times \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\hat{R} \cdot \mathbf{r}}{c} \hat{R} \times \ddot{\mathbf{r}} + \left[3 (\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \hat{R} - \boldsymbol{\beta} \right] \times \ddot{\mathbf{r}} \right\}_{t_R}. \quad (29)$$

■ Para el problema de la carga en órbita circular, suponiendo que el movimiento tiene lugar en el plano xy , deberían encontrar que el campo de radiación, incluyendo la primera corrección relativista, es

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t) = \frac{q\omega^2 a}{c^2 R} \left\{ \left[\cos \theta \cos \xi \hat{\theta} + \sin \xi \hat{\varphi} \right] + \frac{\omega a}{c} \sin \theta \left[-\cos \theta \sin 2\xi \hat{\theta} + \cos 2\xi \hat{\varphi} \right] \right\}, \quad (30)$$

donde $\xi = \omega t_R - \varphi$, y donde $\mathbf{R}$ está definido en términos de sus coordenadas esféricas.

Cómo se relaciona lo anterior con la expansión multipolar. Operando al nivel del campo de radiación hemos calculado la expresión de orden cero y la primera corrección relativista para una carga en movimiento acotado. Esta no es la forma más práctica de hacer las cosas. El resultado (29) es un caso particular del desarrollo multipolar del campo de radiación cuando lo que se tiene es una única carga. En el caso general de una distribución acotada de cargas y corrientes, el campo de radiación hasta la primera corrección relativista es [Landau, ec. 71.4]

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{\hat{R}}{c^2 R} \times \left[\hat{R} \times \ddot{\mathbf{d}} + \frac{1}{6c} \hat{R} \times \ddot{\mathbf{D}} + \ddot{\mathbf{m}} \right]_{t_R}, \quad (31)$$

donde $\mathbf{d}$ es el momento dipolar eléctrico, $\mathbf{m}$ el dipolar magnético, y donde $\mathbf{D}$ está relacionado con el momento cuadrupolar eléctrico del siguiente modo:

$$\mathbf{D} = \hat{R} \cdot \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}, t) [3 \mathbf{r} \mathbf{r} - r^2 \mathbf{I}]. \quad (32)$$

Notemos que en la fórmula del campo de radiación aparece $\hat{R} \times \ddot{\mathbf{D}}$, lo que produce la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \hat{R} \times (\hat{R} \cdot \ddot{\mathbf{Q}}) &= \frac{d^3}{dt^3} \int d^3r \rho(\mathbf{r}, t) \left[3 (\hat{R} \cdot \mathbf{r}) \hat{R} \times \mathbf{r} - r^2 \hat{R} \times \hat{R} \right] \\ &= \frac{d^3}{dt^3} \int d^3r \rho(\mathbf{r}, t) \left[3 (\hat{R} \cdot \mathbf{r}) \hat{R} \times \mathbf{r} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Es decir, da lo mismo usar $\mathbf{Q}$ que

$$\tilde{\mathbf{Q}} = 3 \int d^3r \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \mathbf{r}. \quad (34)$$

La contribución dipolar eléctrica es el término de orden cero en el campo de radiación. Tanto el término dipolar magnético como el cuadrupolar eléctrico son de orden $1/c$. Si hay una sola carga, el momento dipolar eléctrico es $\mathbf{d} = q\mathbf{r}$, y entonces $\ddot{\mathbf{d}} = q\ddot{\mathbf{r}}$. Por lo tanto el término dipolar eléctrico en este caso es

$$\mathbf{E}_d = \frac{\hat{R}}{c^2 R} \times (\hat{R} \times q\ddot{\mathbf{r}})_{t_R}, \quad (35)$$

que coincide con el resultado (16).

En el caso particular de la carga en órbita circular alrededor del origen sobre el plano xy , el momento magnético es

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{2c} \mathbf{r}(t) \times q\mathbf{v}(t) = \frac{q\omega a^2}{2c} \hat{z}. \quad (36)$$

Como es una cantidad constante, $\dot{\mathbf{m}} = 0$, y por lo tanto no hay término de radiación dipolar magnético. Por otro lado,

$$\tilde{\mathbf{Q}} = 3qa^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \omega t & \cos \omega t \sin \omega t & 0 \\ \cos \omega t \sin \omega t & \sin^2 \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{3qa^2}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ \sin 2\omega t & 1 - \cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Debido a que en la definición del momento cuadrupolar interviene una función par de las coordenadas, y puesto que la posición de la partícula cambia de $\mathbf{r}$ a $-\mathbf{r}$ transcurrido medio período orbital, el período del momento cuadrupolar es la mitad del período orbital. De ahí que aparezcan los factores 2ω en la expresión anterior. Luego,

$$\ddot{\tilde{\mathbf{Q}}} = 12q\omega^3 a^2 \begin{pmatrix} \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t & 0 \\ -\cos 2\omega t & -\sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

El término de radiación cuadrupolar eléctrico no se va a anular. A partir de aquí pueden completar lo que falta. Como no hay término dipolar magnético, el resultado del término cuadrupolar eléctrico debería coincidir con la primera corrección relativista en la ec. (30).