FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre 2015

Guía 7: Relatividad de los campos

1. Un sistema inercial S' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto de un sistema S. Puede asumirse que los ejes de los dos sistemas coinciden en $t' = t = 0$.

   (a) Si en S se miden los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, encuentre los campos $\mathbf{E}'(t', \mathbf{r}')$ y $\mathbf{B}'(t', \mathbf{r}')$ en S'.

   (b) Si en S se propaga una onda plana caracterizada por los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ y $\mathbf{B} = \hat{k} \times \mathbf{E}$, demuestre que en S' también se propaga una onda plana y encuéntrela explícitamente.

   (c) Si en S se miden los campos estáticos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, encuentre los campos en S' en los siguientes casos: 1) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$; 2) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{v}$; 3) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$; 4) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$. Proponga ejemplos para cada situación.

2. En un sistema S, en cierto instante de tiempo y cierto punto del espacio se miden campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Demostrar que:

   (a) Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares, lo mismo sucede en cualquier otro sistema inercial.

   (b) La relación de orden entre $|\mathbf{E}|$ y $|\mathbf{B}|$ es la misma en todos los sistemas.

   (c) Si $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces puede encontrarse un sistema en el cual, asociado al mismo evento, o bien sólo hay campo eléctrico o bien solamente campo magnético. ¿Es único este sistema?

3. Un cilindro circular macizo y de longitud infinita tiene densidad de carga y de corriente uniformes. La corriente es paralela al eje del cilindro. Encontrar un sistema de referencia en el cual sólo hay campo magnético o eléctrico. ¿Es único?

4. Un cilindro infinito de sección circular está cargado uniformemente en volumen. Calcular los campos en un sistema de referencia que se mueve paralelo al cilindro. Primero, a partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema, y luego por transformación directa de los campos.

5. Un dipolo magnético puntual $\mathbf{m}$ se encuentra en reposo en el origen de un sistema S', por lo tanto los potenciales en este sistema están dados por $\Phi' = 0$ y $\mathbf{A}' = \mathbf{m} \times \mathbf{r}'/r'^3$. El sistema S' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema de laboratorio S.

   (a) Demostrar que en S los potenciales a primer orden en β son

   $$\Phi = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{R}}{c\, R^3}, \qquad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

   con $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, donde $\mathbf{r}_0(t)$ es la posición del origen de S' medida en S.

   (b) A partir de estos potenciales, calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en S y mostrar que el campo eléctrico se puede escribir de las siguientes maneras alternativas

   $$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/c) - \mathbf{m} \times \frac{[3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v}]}{cR^3}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/2c) + \frac{3}{2}\mathbf{n} \times \frac{[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{m} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\mathbf{v}]}{cR^3},\end{aligned}$$

   donde $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ y $\mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{p})$ es el campo eléctrico de un dipolo efectivo de valor $\mathbf{p}$.

(c) Encontrar los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en S, a primer orden en β, transformando directamente los campos $\mathbf{E}' = 0$ y $\mathbf{B}'$ del sistema S'. Comparar con las expresiones anteriores.

6. Dos partículas cargadas se mueven con velocidad constante en direcciones ortogonales. Calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre la otra en el instante en que una de las partículas cruza la dirección de movimiento de la otra. Verificar que las fuerzas no son iguales y opuestas. Por lo tanto, no se conserva el impulso lineal de las partículas ¿Hay en ello alguna contradicción?

7. *Ley de Biot y Savart 'relativista'*. Un hilo con corriente I se encuentra sobre el eje x. La corriente puede atribuirse a una densidad lineal de carga de valor λ_0 que se mueve a velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{x}$, es decir $I = \lambda_0 v$. Calcule el campo magnético integrando el campo producido por cada elemento de carga, siguiendo dos métodos:

   (a) A partir de la expresión relativista del campo magnético de una carga en movimiento uniforme escrito en términos de las cantidades actuales a tiempo t. Es decir, $\mathbf{B} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$, con

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = q \frac{\mathbf{n}/\gamma^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2} R^2},$$

   donde $\mathbf{R} = R\,\mathbf{n} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$ y ψ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{R}$. La trayectoria de la carga es $\mathbf{r}(t) = x_0 + vt\,\hat{x}$. Notar que todas las cantidades están evaluadas en el tiempo t.

   (b) A partir de la expresión relativista del campo magnético de una carga en movimiento uniforme escrito en términos de las cantidades retardadas. Es decir, $\mathbf{B} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}$, con

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = q \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} \right]_{\text{ret}}.$$

   Para este segundo método, lo importante es la imagen de la línea de cargas en movimiento. Usted ha visto en los problemas de la guía anterior que la longitud de la imagen de una regla depende de la posición del observador y del tiempo de observación. Entonces, antes de poder integrar el campo de toda la línea de cargas, deberá calcular cuál es la densidad lineal de carga $\lambda(x)$ "vista" desde $\mathbf{r}$. Lo que hay que notar al final de este problema es que aunque el campo de cada elemento de carga tiene correcciones relativistas, el campo de todo el hilo sigue estando dado por la ley de Bioy y Savart. Para una discusión de este tema ver Jackson 3ra. ed., nota al pie de la página 176, en la sección "Biot and Savart Law".