FÍSICA TEÓRICA 1 − 2do. Cuatrimestre 2015

Guía 8: Radiación

1. Una partícula no relativista de carga Ze, masa m y energía cinética inicial $\mathcal{E}$ incide frontalmente sobre un centro de fuerzas fijo. La interacción es repulsiva y está descripta por un potencial $V(r)$ que es mayor que $\mathcal{E}$ a distancias suficientemente cercanas al origen.

   (a) Mostrar que la energía total radiada está dada por

   $$\Delta W = \frac{4}{3}\frac{Z^2e^2}{m^2c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_{\min}}^{\infty}\left|\frac{dV}{dr}\right|^2\frac{dr}{\sqrt{V\left(r_{\min}\right)-V(r)}},$$

   donde $r_{\min}$ es la distancia de mínimo acercamiento al centro de fuerzas. (Jackson)

   (b) Si la interacción es Coulombiana, $V(r) = ZZ'e^2/r$, mostrar que la energía total irradiada es

   $$\Delta W = \frac{8}{45}\frac{Zmv_0^5}{Z'c^3},$$

   donde v_0 es la velocidad de la carga incidente en el infinito. (Jackson)

   (c) Como caso particular, considerar un positrón que incide con sobre un protón. Si la velocidad inicial del positrón en el infinito es v_0, estimar su velocidad final como resultado de la perdida de energía por radiación, despreciando el movimiento del protón. ¿Cómo está polarizada la radiación? Despreciando ahora los efectos de la pérdida de energía por radiación, pero teniendo en cuenta la masa finita del protón, estimar la velocidad final del positrón. Compare los dos resultados para la velocidad final.

2. Este problema es la versión relativista del anterior. Una partícula relativista de carga q y masa m que se mueve sobre el eje x incide sobre una partícula de carga Q fija en el origen. Las dos cargas tienen el mismo signo. Inicialmente, en $x \to \infty$ y $t \to -\infty$, la partícula de masa m está caracterizada por un factor relativista γ_0.

   (a) Demuestre primero que para una partícula de masa m y carga q

   $$m\gamma(\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}} = q\Big[\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B} - (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})\,\boldsymbol{\beta}\Big].$$

   Esta fórmula se usa mucho en los problemas relativistas para obtener $\dot{\mathbf{v}}$.

   (b) Encuentre x como función de γ. ¿Cuál es la distancia de mínimo acercamiento?

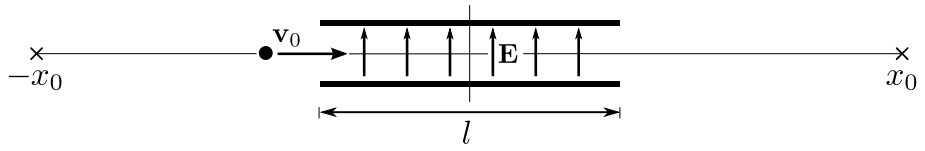
   (c) Encuentre $\dot{v}$ como función de γ.

   (d) Encuentre $\dot{\gamma}$ como función de γ.

   (e) Escriba la potencia radiada como función de γ.

   (f) Escriba la energía total radiada como una integral, $\Delta W = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma\, f(\gamma)$, dando los valores de γ_1, γ_2 y la función f en términos de los datos del problema.

3. Una partícula relativista de carga q y masa m pasa a través de un capacitor de placas paralelas de longitud l. El campo $\mathbf{E}$ en el interior del capacitor es homogéneo y constante. La partícula ingresa al capacitor con una velocidad $\mathbf{v}_0$ perpendicular a $\mathbf{E}$ y paralela a las placas, y viaja tan rápido que su desviación puede despreciarse.



   a) Calcule la energía total irradiada durante el paso de la partícula por el capacitor.

   b) Escriba la expresión del campo eléctrico de radiación y grafíquelo cualitativamente en función del tiempo para los puntos $-x_0$ y x_0, que se encuentran sobre la línea que sigue la partícula, simétricos respecto del centro del capacitor y muy alejados de éste. Tenga especial cuidado en el cálculo de los intervalos temporales en que ese campo es distinto de cero.

4. Una partícula cargada efectúa un movimiento circular uniforme con frecuencia ω y radio a.

   (a) A partir de las fórmulas generales de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ de una carga en movimiento arbitrario, calcular los campos de radiación hasta orden ω^3. Tenga en cuenta que necesitará calcular el tiempo retardado hasta orden a/c.

   (b) Encontrar los campos de radiación hasta el mismo orden en ω, pero esta vez calculando las contribuciones de los términos de radiación multipolares hasta el orden que sea necesario.

   (c) Comparar los dos resultados.

   (d) Analizar en detalle la polarización y la intensidad de la radiación de orden dipolar eléctrico en función de la dirección de observación.

   (e) A partir de los campos de radiación, calcular la potencia radiada y comparar con las fórmulas generales del desarrollo multipolar [por ejemplo, Landau ec. 71.5].

5. El radio de un anillo circular es una función del tiempo $a(t) = r_0 \cos^2 \omega t$. El anillo tiene carga q distribuida uniformemente. En todo momento $\dot{a}/c \ll 1$.

   (a) Calcular los campos de radiación $\mathbf{E}_{\rm rad}$ y $\mathbf{B}_{\rm rad}$ hasta orden dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico.

   (b) Graficar cualitativamente $\mathbf{E}_{\rm rad}$ y $\mathbf{B}_{\rm rad}$ sobre la superficie de una esfera.

   (c) Calcular la potencia media emitida por unidad de ángulo sólido. Graficar cualitativamente en función de la dirección.

   (d) Calcular la potencia media total emitida en todas direcciones.

6. Ídem al problema anterior para dos cargas q y $-q$ que giran en el plano xy con frecuencia ω, separadas una distancia d. ¿Cuál es la frecuencia de la radiación emitida?

7. Ídem al problema anterior para dos cargas iguales de valor q.

8. Un dipolo magnético $\mathbf{m}$ rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. El ángulo entre $\mathbf{m}$ y $\boldsymbol{\omega}$ es α. Calcular los campos de radiación $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, la polarización y la intensidad en función de la dirección de observación, y la energía total irradiada por período.

9. **"Magnetars"**. El pulsar SGR 1806-20 rota con un período $T = 7.5$ s. En su superficie esto representa una velocidad de 30000 km/h. La velocidad de frenado de esta rotación es inusualmente alta en términos astronómicos, siendo $\dot{T} = 8 \times 10^{-11}$. Calcule el máximo campo magnético sobre la superficie del pulsar, asumiendo que su masa y su radio son los típicos de este tipo de estrellas ($m = 1.4 M_\odot = 2.8 \times 10^{30}$ kg, $r = 10$ km) y que el frenado en la rotación se produce debido a la pérdida de energía por radiación. Suponga además que la velocidad angular es perpendicular al momento magnético de la estrella. [K. T. McDonald, "Magnetars", Am. J. Phys. **68** (2000) 775.]

10. Una extensión del problema anterior: cuántas ciudades como Buenos Aires podrían iluminarse con la energía que emite la Tierra debido a la rotación diurna de su momento magnético.

11. La corriente superficial sobre el plano xy es cero para $t < 0$ y vale $\kappa\, \hat{x}$ para $t > 0$. La densidad de carga es cero en todo el espacio. A partir de los potenciales retardados, encuentre los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ para todo tiempo.