FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre 2015

Un problema

Los campos de *aceleración* de una carga que se mueve según la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ son

$$\mathbf{E}_{\rm acel}(\mathbf{R},t) = \frac{q}{c^2}\left[\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\,\frac{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\ddot{\mathbf{r}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3}\right]_{t'},$$

$$\mathbf{B}_{\rm acel}(\mathbf{R},t) = \mathbf{n}\times\mathbf{E}_{\rm acel}(\mathbf{R},t), \tag{1}$$

donde

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}, \tag{2}$$

y donde todas las cantidades que dependen de la trayectoria de la carga, incluido el versor $\mathbf{n}$, están evaluadas en el tiempo retardado, determinado por la ecuación

$$c(t-t') = |\mathbf{R}-\mathbf{r}(t')|, \tag{3}$$

de manera que el tiempo t' debe considerarse función de t,

$$t' \to t'(t). \tag{4}$$

Podríamos incluir también la dependencia en $\mathbf{R}$, pero aquí no se va a usar nunca. Entonces, cada vez que en una misma fórmula aparezcan t y t', debe entenderse que t' es función t. Ahora bien, supongan que no conocen de antemano la trayectoria de la partícula: no saben cuál es la función $\mathbf{r}(t)$. La fórmula (1) no servirá para calcular nada. Pero imaginen que desde el punto de observación $\mathbf{R}$ pueden registrar la imagen de la trayectoria de la partícula. (Por ejemplo, en $\mathbf{R}$ hay un detector que filma el paso de la partícula cargada a través de una cámara de niebla). Lo que conocen entonces es la posición aparente de la partícula, también llamada posición retardada,

$$\mathbf{r}_{\rm ap}(t) = \mathbf{r}(t'), \tag{5}$$

donde t' es el tiempo retardado. Lo que conocen es $\mathbf{r}_{\rm ap}(t)$. Noten que esta información es suficiente para calcular varias de las cosas que aparecen en la ec. (1):

$$\mathbf{R}-\mathbf{r}(t') = \mathbf{R}-\mathbf{r}_{\rm ap}(t),$$

$$\mathbf{n}(t') = \frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}_{\rm ap}(t)}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_{\rm ap}(t)|} = \mathbf{n}_{\rm ap}(t). \tag{6}$$

Lo que resta averiguar es cuánto valen $\boldsymbol{\beta}(t')$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$ a partir de la de la trayectoria aparente de la partícula, que es la información de la que disponen. En principio, el problema podría no tener solución. Una misma

trayectoria aparente podría corresponder a varias trayectorias retardadas, o ciertos efectos de proyección podrían volver imposible despejar alguna de las componentes. En realidad no es así. La unicidad está asegurada, en última instancia, porque la luz se mueve a la máxima velocidad posible.

En clase vimos cómo se relaciona la velocidad aparente (es decir, la velocidad de la imagen de la partícula) con la velocidad retardada (que es la velocidad que tenía la partícula en el momento en que emitió la imagen que vemos ahora). La deducción era así: primero, por definición

$$\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t) = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{r}_{\rm ap}(t)}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dt'}{dt}\,\frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} = \frac{dt'}{dt}\,\boldsymbol{\beta}(t'). \tag{7}$$

La relación entre los diferenciales de t y t' puede encontrarse diferenciando la ecuación que define t',

$$c(dt - dt') = -\frac{[\mathbf{R} - \mathbf{r}(t')]\cdot\dot{\mathbf{r}}(t')\,dt'}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}(t')|}$$

$$\Rightarrow dt' = \frac{dt}{1 - \mathbf{n}(t')\cdot\boldsymbol{\beta}(t')}. \tag{8}$$

Luego,

$$\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t) = \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{1 - \mathbf{n}(t')\cdot\boldsymbol{\beta}(t')}. \tag{9}$$

Vimos en clase que esta relación implicaba curiosos efectos de proyección: la velocidad de acercamiento (cuando $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} > 0$) podía ser arbitrariamente grande; en cambio, la velocidad de alejamiento (cuando $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} < 0$), no podía ser mayor que $c/2$.

Pero ahora más que saber cuánto vale la velocidad aparente en términos de la velocidad retardada, lo que buscamos es conocer la velocidad retardada a partir de la velocidad aparente. Si hubiéramos planteado la relación inversa, habríamos encontrado que

$$\boldsymbol{\beta}(t') = \frac{dt}{dt'}\,\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t), \tag{10}$$

y para obtener dt/dt' hubiéramos escrito

$$c(dt - dt') = -\frac{[\mathbf{R} - \mathbf{r}_{\rm ap}(t)]\cdot\dot{\mathbf{r}}_{\rm ap}(t)\,dt}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_{\rm ap}(t)|}. \tag{11}$$

Finalmente,

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{1 + \mathbf{n}_{\rm ap}(t)\cdot\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}, \tag{12}$$

con lo que resulta

$$\boldsymbol{\beta}(t') = \frac{\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}{1 + \mathbf{n}_{\rm ap}(t)\cdot\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}. \tag{13}$$

Una forma alternativa de obtener esta relación es invirtiendo la ec. (9), aunque hay que usar un pequeño truco. Primero, despejando queda

$$\boldsymbol{\beta}(t') = [1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')]\ \boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t). \tag{14}$$

Todavía esto no sirve, porque en el medio está el producto escalar de $\boldsymbol{\beta}(t')$ con $\mathbf{n}(t')$. El truco consiste en proyectar la ecuación sobre $\mathbf{n}(t')$,

$$\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') = [1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')]\ \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t),$$

lo que permite escribir $\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')$ en términos de $\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)$, como sigue:

$$\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') = \frac{\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}{1 + \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}. \tag{15}$$

Luego,

$$1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') = \frac{1}{1 + \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}. \tag{16}$$

Tener en cuenta que la posición retardada coincide con la posición aparente, de modo que $\mathbf{n}(t')$ es $\mathbf{n}_{\rm ap}(t)$. Así, reemplazando en la ec. (14) se obtiene

$$\boldsymbol{\beta}(t') = \frac{\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}{1 + \mathbf{n}_{\rm ap}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}, \tag{17}$$

que coincide con el resultado del primer método, ec. (13). Un tercer método, más directo, para arribar al mismo resultado consiste en escribir la ecuación

$$\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t) = \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')}, \tag{18}$$

como

$$\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t) = \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa(t)}, \tag{19}$$

donde

$$\kappa(t) = \frac{dt}{dt'} = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'). \tag{20}$$

Noten que este mismo factor κ aparece en la expresión del campo de *aceleración*, ec. (1). Usando (19), queda

$$\kappa(t) = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \kappa(t) \boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)$$

$$\Rightarrow \kappa(t) = \frac{1}{1 + \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)} = \frac{1}{1 + \mathbf{n}_{\rm ap}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}. \tag{21}$$

Luego,

$$\boldsymbol{\beta}(t') = \kappa(t)\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t) = \frac{\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}{1 + \mathbf{n}_{\rm ap}(t)\cdot\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}. \tag{22}$$

En definitiva, dimos un montón de vueltas para demostrar una sola cosa. Lo que sigue es más directo.

Ya tenemos $\boldsymbol{\beta}(t')$ en función de las direcciones y velocidades aparentes. Ahora falta encontrar la aceleración retardada $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$ en términos de las direcciones, velocidades y aceleraciones aparentes. No hay mucho que pensar. Directamente derivando la ec. (22) queda

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}(t')}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\left[\kappa(t)\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)\right]. \tag{23}$$

Pero $dt/dt' = \kappa$, entonces

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}(t')}{dt'} = \kappa(t)\frac{d}{dt}\left[\kappa(t)\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)\right]. \tag{24}$$

Lo que va a darles un poco de trabajo es calcular $\dot{\kappa}(t)$,

$$\frac{d\kappa(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1 + \mathbf{n}_{\rm ap}(t)\cdot\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}\right) = -\kappa(t)^2\frac{d}{dt}\left[\mathbf{n}_{\rm ap}(t)\cdot\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)\right]. \tag{25}$$

Completen los pasos que faltan en esta derivada. Finalmente deberían escribir la aceleración retardada, $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$, en términos de estas cuatro cosas:

$$\boldsymbol{\beta}_{\rm ap},\ \ \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap},\ \ \mathbf{n}_{\rm ap},\ \ \text{y}\ \ |\mathbf{R} - \mathbf{r}_{\rm ap}|. \tag{26}$$

La expresión final involucra cuatro términos, y no es ni muy sencilla ni muy complicada.

Una vez hecho lo anterior, conocidas $\boldsymbol{\beta}(t')$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$ en función de las cantidades aparentes, el campo de *aceleración*,

$$\mathbf{E}_{\rm acel}(\mathbf{R}, t) = \frac{q}{c}\,\frac{\mathbf{n}_{\rm ap}(t)\times\left\{\left[\mathbf{n}_{\rm ap}(t) - \boldsymbol{\beta}(t')\right]\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right\}}{\kappa(t)^3\,|\mathbf{R} - \mathbf{r}_{\rm ap}(t)|}, \tag{27}$$

puede dejarse escrito en función de esas mismas cantidades. No es necesario que lo hagan. Nuestro interés es ahora el campo de *radiación*, que se obtiene despreciando los términos que decaen más rápido que R^{-1}. En particular, $\mathbf{n}$ puede reemplazarse por $\hat{R}$ y $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|$ por R. Así resulta

$$\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{R}, t) = \frac{q}{cR}\,\frac{\hat{R}\times\left\{\left[\hat{R} - \boldsymbol{\beta}(t')\right]\times\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\right\}}{\kappa(t)^3}, \tag{28}$$

donde es suficiente con escribir $\kappa^{-1} \approx 1 + \boldsymbol{\beta}_{\rm ap}\cdot\hat{R}$, aunque lo más práctico es dejar los factores κ hasta el final y recién ahí simplificar, si fuera necesario.

■ **El ejercicio principal:** Escriban el campo de radiación en términos de las magnitudes aparentes, con cuidado de no arrastrar términos que decaigan más rápido que R^{-1}. Ya tienen algunos resultados; por ejemplo, las ecuaciones (21) y (22). Deberían encontrar para $\mathbf{E}_{\rm rad}$ una fórmula asombrosamente sencilla.