Despreciando términos que decaen como $1/R$, queda

$$\dot{\kappa} = -\kappa^2 \, \hat{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}},$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') = \kappa^2 \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} - \kappa \, \left(\hat{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} \right) \, \boldsymbol{\beta}_{\text{ap}} \right]_t . \tag{1}$$

Todas las cantidades a la derecha están evaluadas en t. Cuando sustituyan esto y $\boldsymbol{\beta}(t') = \kappa \boldsymbol{\beta}_{\text{ap}}$ en el campo de radiación quedará

$$\hat{R} \times \left\{ \left[\hat{R} - \boldsymbol{\beta}(t') \right] \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t') \right\} = \hat{R} \times \left\{ \left[\hat{R} - \kappa \boldsymbol{\beta}_{\text{ap}} \right]_t \times \kappa^2 \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} - \kappa \, \left(\hat{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} \right) \, \boldsymbol{\beta}_{\text{ap}} \right]_t \right\}$$

$$= \kappa^2 \, \hat{R} \times \left\{ \hat{R} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} - \kappa \, \boldsymbol{\beta}_{\text{ap}} \times \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} - \left(\hat{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} \right) \, \hat{R} \right] \right\}_t . \tag{2}$$

Lo que figura en el último corchete es algo perpendicular a $\hat{R}$. Cuando tomen el producto vectorial con el $\hat{R}$ que está afuera de todo, el término que tiene el corchete quedará así

$$\hat{R} \times \left\{ \boldsymbol{\beta}_{\text{ap}} \times \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} - \left(\hat{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} \right) \, \hat{R} \right] \right\} = - \left(\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\text{ap}} \right) \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} - \left(\hat{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} \right) \, \hat{R} \right] . \tag{3}$$

Lo que se canceló aquí fue el término BAC del doble producto vectorial $BAC - CAB$,

$$\hat{R} \cdot \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} - \left(\hat{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} \right) \, \hat{R} \right] = 0. \tag{4}$$

Finalmente resulta

$$\hat{R} \times \left\{ \left[\hat{R} - \boldsymbol{\beta}(t') \right] \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t') \right\} = \kappa^2 \hat{R} \times (\hat{R} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}}) + \kappa^3 \left(\hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\text{ap}} \right) \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} - \left(\hat{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} \right) \, \hat{R} \right] . \tag{5}$$

El corchete también se puede escribir así

$$\left[\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} - \left(\hat{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} \right) \, \hat{R} \right] = -\hat{R} \times (\hat{R} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}}). \tag{6}$$

Luego,

$$\hat{R} \times \left\{ \left[\hat{R} - \boldsymbol{\beta}(t') \right] \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t') \right\} = \kappa^2 \left(1 - \kappa \, \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\text{ap}} \right) \, \hat{R} \times \left(\hat{R} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} \right) . \tag{7}$$

Ahora

$$1 - \kappa \, \hat{R} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\text{ap}} = 1 - \kappa \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) = \kappa. \tag{8}$$

Y ahora sí, finalmente,

$$\hat{R} \times \left\{ \left[\hat{R} - \boldsymbol{\beta}(t') \right] \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t') \right\} = \kappa^3 \, \hat{R} \times \left(\hat{R} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ap}} \right) . \tag{9}$$

Falta multiplicar por q y dividir por $c\kappa^3 R$ y queda la fórmula final.