■ El radio de un anillo circular es una función del tiempo $a(t) = r_0 \cos^2 \omega t$. El anillo tiene carga q distribuida uniformemente. En todo momento $\dot{a}/c \ll 1$.

a) Calcular los campos de radiación $\mathbf{E}_{\rm rad}$ y $\mathbf{B}_{\rm rad}$ hasta orden dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico.

b) Graficar cualitativamente $\mathbf{E}_{\rm rad}$ y $\mathbf{B}_{\rm rad}$ sobre la superficie de una esfera.

c) Calcular la potencia media emitida por unidad de ángulo sólido. Graficar cualitativamente en función de la dirección.

d) Calcular la potencia media total emitida en todas direcciones.

Los campos de radiación

En el cálculo del campo de radiación cuadrupolar eléctrico da lo mismo usar $\mathbf{Q}$ que $\tilde{\mathbf{Q}}$, donde

$$\mathbf{Q} = \int d^3r\ \rho(\mathbf{r}) \left[3\mathbf{rr} - r^2\mathbf{I}\right], \qquad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \int d^3r\ 3\rho(\mathbf{r})\ \mathbf{rr}.$$

Esto es así porque lo que uno necesita es

$$\hat{R} \times \mathbf{D} = \hat{R} \times (\hat{R} \cdot \mathbf{Q}),$$

entonces la parte proporcional a $\mathbf{I}$ en $\mathbf{Q}$ aporta el siguiente término

$$\hat{R} \times \left\{ \hat{R} \cdot \mathbf{I} \left[\int d^3r\ \rho(\mathbf{r}) r^2 \right] \right\} = \hat{R} \times \hat{R} \left[\int d^3r\ \rho(\mathbf{r}) r^2 \right] = 0.$$

En componentes es

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \int d^3r\ 3\rho(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}.$$

Dicho esto, para el problema del anillo (Guía 8, problema 5) la integral sobre las cargas es una integral de línea,

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \int_0^{2\pi} a(t) d\varphi\ \lambda(t)\ 3a(t)^2 \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto se lee así: $a(t)d\varphi$ es el diferencial de longitud, multiplicado por $\lambda(t)$ da el diferencial de carga. Luego viene la matriz $3\mathbf{rr}$. Como la coordenada de cada punto es proporcional al radio del anillo, aparece el factor $a(t)^2$. La densidad de carga es

$$\lambda(t) = \frac{q}{2\pi a(t)}.$$

Entonces

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{3qa(t)^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{3qa(t)^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\mathbf{D} = \hat{R}\cdot\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{3qa(t)^2}{2}\left[\hat{R} - (\hat{z}\cdot\hat{R})\hat{z}\right].$$

Aquí está tenido en cuenta que el efecto de multiplicar $\hat{R}$ por la matriz que aparece en $\tilde{\mathbf{Q}}$ es el de proyectar $\hat{R}$ sobre el plano xy, o, en otras palabras, sustraerle su componente en z. No hace falta darse cuenta de eso; los cálculos salen igual. Finalmente, lo que necesitamos para calcular el campo de radiación es

$$\hat{R}\times\dddot{\mathbf{D}} = \frac{3q}{2}\frac{d^3}{dt^3}\left[a(t)^2\right]\ \hat{R}\times\left[\hat{R} - (\hat{z}\cdot\hat{R})\hat{z}\right] = \frac{3q}{2}\frac{d^3}{dt^3}\left[a(t)^2\right]\ (\hat{z}\cdot\hat{R})\ \hat{z}\times\hat{R},$$

$$= \frac{3q}{2}\frac{d^3}{dt^3}\left[a(t)^2\right]\ \cos\theta\ \sin\theta\ \hat{\varphi}.$$

Luego

$$\hat{R}\times(\hat{R}\times\dddot{\mathbf{D}}) = -\frac{3q}{2}\ \dddot{A}\ \cos\theta\ \sin\theta\ \hat{\theta},$$

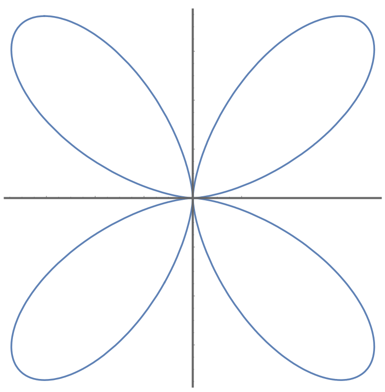
y

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R},t) = -\frac{q}{4c^3R}\ \dddot{A}(t-R/c)\ \cos\theta\ \sin\theta\ \hat{\theta},$$

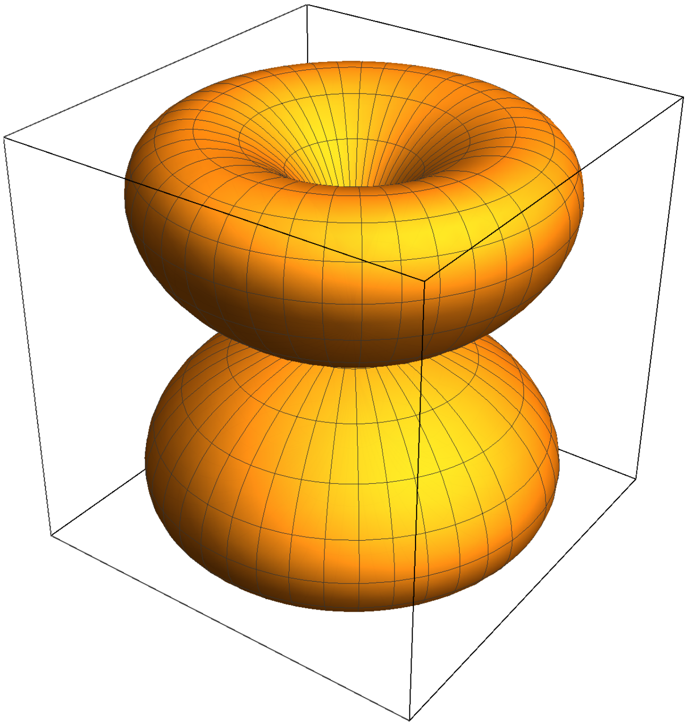
donde

$$A(t) = a(t)^2.$$

Graficado en polares, $|\mathbf{E}_{\text{rad}}|$ tiene cuatro lóbulos.



En 3D la intensidad tiene simetría de revolución.



El campo de radiación resultó ser

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t) = -\frac{q}{4c^3 R} \dddot{A}(t - R/c)\ \cos\theta\ \sin\theta\, \hat{\theta},$$

donde, según el enunciado del problema, la función $A(t)$ es

$$A(t) = (r_0 \cos^2 \omega t)^2.$$

Conviene desarrollar el $\cos^4 x$ en términos de frecuencias elementales, aplicando dos veces la identidad

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

con lo que resulta

$$A(t) = \frac{r_0^2}{8} (3 + 4 \cos 2\omega t + \cos 4\omega t)\,.$$

Así resulta más fácil calcular la derivada tercera,

$$\dddot{A}(t) = 4\omega^3 r_0^2 (\sin 2\omega t + 2 \sin 4\omega t)\,.$$

Es importante notar que no se trata de una fuente armónica en sentido estricto, sino de la superposición de dos fuentes armónicas, de frecuencias angulares 2ω y 4ω, respectivamente. No pueden, por ejemplo, aplicar aquí las fórmulas del capítulo 9 del libro de Jackson, pero si quisieran deberían tratar cada componente por separado.

La intensidad y la potencia total

La intensidad o potencia por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dP}{d\Omega}(\mathbf{R}, t) = R^2\, \mathbf{S}(\mathbf{R}, t) \cdot \hat{R}.$$

En el caso del problema del anillo, quedaba

$$\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{R}, t) = -\frac{q}{4c^3 R}\dddot{A}(t - R/c)\ \cos\theta\ \sin\theta\ \hat{\theta},$$

donde

$$A(t) = a(t)^2,$$

y entonces resulta

$$\frac{dP}{d\Omega}(\mathbf{R}, t) = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{q}{4c^3}\right)^2 [\dddot{A}(t - R/c)]^2\ \ (\cos\theta\ \sin\theta)^2$$

$$= \frac{c}{4\pi}\left(\frac{q}{4c^3}\right)^2 [\dddot{A}(t - R/c)]^2\ \frac{1}{4}\ \sin^2 2\theta.$$

Ésta es la energía por unidad de tiempo y por unidad de ángulo sólido que atraviesa un elemento de área orientado según $\hat{R}$ en la posición $\mathbf{R}$ a tiempo t. Como el campo se propaga a velocidad c, esa energía debe haberse emitido a tiempo $t - R/c$, y suele hablarse simplemente de la potencia emitida, sin referencia a un punto de observación $\mathbf{R}$, escribiendo

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{q}{4c^3}\right)^2 [\dddot{A}(t)]^2\ \frac{1}{4}\ \sin^2 2\theta.$$

Es importante que en la relación entre el tiempo retardado t' y el tiempo de observación no intervengan los factores de proyección κ, sino que sea simplemente $dt' = dt$.

La potencia total es la integral en todo el ángulo sólido de $dP/d\Omega$. En el problema del anillo resulta

$$P(t) = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{q}{4c^3}\right)^2 \dddot{A}(t)^2\ \int d\Omega\ (\cos\theta\ \sin\theta)^2$$

$$= \frac{c}{4\pi}\left(\frac{q}{4c^3}\right)^2 \dddot{A}(t)^2\ \ 2\pi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\ \cos^2\theta\ \sin^2\theta.$$

Aquí

$$\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\ \cos^2\theta\ \sin^2\theta = \int_{-1}^{1} dx\ x^2(1 - x^2) = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

Al final es

$$P(t) = \frac{2c}{15}\left(\frac{q}{4c^3}\right)^2 \dddot{A}(t)^2.$$

Reemplazando por la función $A(t)$ del enunciado, obtenemos

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{c}{16\pi}\left(\frac{q}{4c^3}\right)^2 \left[4\omega^3 r_0^2 \left(\sin 2\omega t + 2\sin 4\omega t\right)\right]^2 \sin^2 2\theta,$$

$$P(t) = \frac{2c}{15}\left(\frac{q}{4c^3}\right)^2 \left[4\omega^3 r_0^2 \left(\sin 2\omega t + 2\sin 4\omega t\right)\right]^2.$$

En estas dos expresiones hay efectos de interferencia entre las dos componentes, pero desaparecen el tomar el promedio temporal. Las dos fuentes tienen en común el período (no fundamental) $T = 2\pi/\omega$, así que el promedio temporal puede calcularse como

$$\langle \ldots \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt \ \ldots,$$

usando que

$$\left\langle \sin^2 2\omega t \right\rangle = \left\langle \sin^2 4\omega t \right\rangle = \frac{1}{2},$$

y que

$$\langle \sin 2\omega t \ \sin 4\omega t \rangle = 0.$$

Así resulta

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{5c}{32\pi}\left(\frac{q}{4c^3}\right)^2 \left(4\omega^3 r_0^2\right)^2 \sin^2 2\theta,$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{c}{3}\left(\frac{q}{4c^3}\right)^2 \left(4\omega^3 r_0^2\right)^2.$$

Un repaso de las fórmulas generales

Si sólo hay término cuadrupolar es

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t) = \left.\frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \dddot{\mathbf{D}})}{6Rc^3}\right|_{t-R/c}.$$

La intensidad o potencia por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dP}{d\Omega}(\mathbf{R}, t) = R^2 \mathbf{S}(\mathbf{R}, t) \cdot \hat{R} = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{36c^6}\left|\hat{R} \times \left[\dddot{\mathbf{Q}}(t - R/c) \cdot \hat{R}\right]\right|^2$$

$$= \frac{1}{144\pi c^5}\left|\hat{R} \times \left[\dddot{\mathbf{Q}}(t - R/c) \cdot \hat{R}\right]\right|^2.$$

Cómo calcular ahora el valor medio va a depender de la forma en que $\mathbf{Q}$ dependa del tiempo; tal vez ni siquiera tenga sentido.

La potencia total es la integral en todo el ángulo sólido de la intensidad. Obtener la fórmula general es un poco complicado, porque en la expresión de $dP/d\Omega$ aparecen muchas componentes multiplicadas del versor $\hat{R}$, entonces hay que saber cuánto valen cosas del tipo

$$\int d\Omega\ \hat{R}_i \hat{R}_j \hat{R}_k \hat{R}_l.$$

El resultado, sin embargo, es simple:

$$P(R,t) = \frac{1}{180c^5} \left| \dddot{\mathbf{Q}}(t - R/c) \right|^2,$$

donde se entiende que

$$|\dddot{\mathbf{Q}}|^2 = \sum_{ij} \dddot{Q}_{ij}^2.$$

La potencia $P(R,t)$ es la energía por unidad de tiempo que atraviesa a tiempo t una esfera de radio R. Como la luz viaja a velocidad c, esa energía se emitió a tiempo $t - R/c$, y suele hablarse simplemente de la potencia emitida, sin referencia a una esfera de radio R, escribiendo

$$P(t) = \frac{1}{180c^5} \left| \dddot{\mathbf{Q}}(t) \right|^2,$$

del mismo modo en que, en la fórmula de Larmor, uno escribe

$$P(t) = \frac{2}{3c^3}\ |q\dot{\mathbf{v}}(t)|^2,$$

sin referencia a ningún R.

Atención aquí: en la fórmula para la potencia total no puede reemplazarse $\mathbf{Q}$ por $\tilde{\mathbf{Q}}$, porque en alguna parte del cálculo se usa que $\operatorname{Tr} \mathbf{Q} = 0$. En términos de $\tilde{\mathbf{Q}}$, aparece un factor extra:

$$P(t) = \frac{1}{180c^5} \left| \dddot{\tilde{\mathbf{Q}}}(t) \right|^2 - \frac{1}{540c^5} \left[\operatorname{Tr}\, \dddot{\tilde{\mathbf{Q}}}(t) \right]^2.$$

Atención. No hay que preocuparse tanto por las fórmulas generales. Cuando se está resolviendo un caso particular, como el de la guía, no es necesario tener a la vista las fórmulas generales para la intensidad o la potencia. Las dependencias en la dirección suelen ser lo suficientemente simples como para que las integrales angulares no ofrezcan dificultad, una vez que se conocen los campos de radiación.

Las molestas fórmulas del Jackson

Si la dependencia temporal es armónica (que no es el caso del problema de la guía),

$$\mathbf{D}(t) = \Re e \left[\mathbf{D}_0\, e^{-i\omega t} \right],$$

entonces

$$\dddot{\mathbf{D}}(t - R/c) = \Re e \left[i\omega^3 \, \mathbf{D}_0 e^{-i\omega(t-R/c)} \right].$$

En el exponente se puede introducir un número de onda $k = \omega/c$, y queda

$$\dddot{\mathbf{D}}(t - R/c) = \Re e \left[i\omega^3 \, \mathbf{D}_0 e^{i(kR-\omega t)} \right].$$

Supongamos que $\mathbf{D}_0$ sea real. Esto da

$$\frac{\dddot{\mathbf{D}}(t - R/c)}{c^3} = -\frac{\omega^3}{c^3} \, \mathbf{D}_0 \sin(kR - \omega t) = -k^3 \, \mathbf{D}_0 \sin(kR - \omega t).$$

La intensidad, o potencia por unidad de ángulo sólido es

$$\frac{dP}{d\Omega}(\mathbf{R}, t) = \frac{c}{4\pi} R^2 \left| \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t) \right|^2 = \frac{c}{4\pi} \frac{k^6}{36} |\hat{R} \times \mathbf{D}_0|^2 \, \sin^2(kR - \omega t).$$

Para tomar el valor medio temporal hay que usar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \, \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

Finalmente, escribiendo $\mathbf{D}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot \hat{R}$, queda

$$\left\langle \frac{dP(\mathbf{R})}{d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{2} \, \frac{c}{4\pi} \frac{k^6}{36} |\hat{R} \times \mathbf{D}_0|^2 = \frac{ck^6}{288\pi} |\hat{R} \times (\mathbf{Q}_0 \cdot \hat{R})|^2.$$

Esta fórmula es el valor medio de la intensidad para un cuadrupolo que depende armónicamente del tiempo. El valor medio de la potencia total, luego de integrar la intensidad en todo el ángulo sólido, es

$$\langle P(t) \rangle = \frac{ck^6}{360} \left| \mathbf{Q}_0 \right|^2,$$

donde

$$\left| \mathbf{Q}_0 \right|^2 = \sum_{ij} Q_{0ij}^2.$$