Física Teórica 1 – 2do. cuatrimestre de 2015 – segundo recuperatorio (9/12)

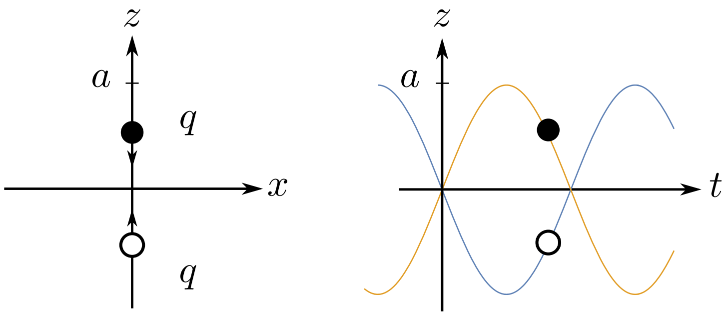
▪ **Problema 1**. Dos cargas de valor q se mueven sobre el eje z, como muestra la figura. La posición de una de las cargas es $z(t) = a\sin\omega t$, y la posición de la otra es $-z(t)$.

a) Calcular los campos de radiación $\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{R},t)$ y $\mathbf{B}_{\rm rad}(\mathbf{R},t)$ incluyendo los términos dipolar eléctrico, dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico. (5 pts)

b) Graficar $\mathbf{E}_{\rm rad}$ y $\mathbf{B}_{\rm rad}$ sobre la superficie de una esfera. Grafique cada orden por separado. Elija puntos representativos, indique esquemáticamente la evolución de cada campo. (2 pts)

c) Calcular la potencia media por unidad de ángulo sólido. Graficar en función de la dirección. (2 pts)

d) Calcular la potencia media total emitida en todas direcciones. (1 pt)



▪ **Solución.** a) Por simetría no hay momento dipolar eléctrico, y debido a que cada carga se mueve radialmente el momento magnético es cero. Para calcular los campos de radiación cuadrupolar usamos el tensor

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) = 3\sum_l q_l\, \mathbf{r}_l(t)\mathbf{r}_l(t) = 6q\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z(t)^2 \end{pmatrix},$$

con el que definimos un vector

$$\tilde{\mathbf{D}}(t) = \hat{R}\cdot\mathbf{Q}(t) = 6qz(t)^2\,\cos\theta\;\hat{z}.$$

Ahora necesitamos calcular

$$\hat{R}\times\left[\hat{R}\times\dddot{\tilde{\mathbf{D}}}(t)\right] = -6q\frac{d^3}{dt^3}\left[z(t)^2\right]\,(\sin\theta\,\cos\theta)\;\hat{\theta}.$$

Escribiendo

$$z(t)^2 = a^2\sin^2\omega t = a^2\,\frac{1-\cos 2\omega t}{2},$$

resulta, primero,

$$\frac{d^3}{dt^3}\left[z(t)^2\right] = -4a^2\omega^3\sin 2\omega t,$$

y luego

$$\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{R},t) = -4qa^2\,\frac{\omega^3}{c^3R}\;(\sin\theta\,\cos\theta)\,\sin 2\omega t_R\,\hat{\theta},$$

donde $t_R = t - R/c$. Por otro lado,

$$\mathbf{B}_{\rm rad}(\mathbf{R},t) = \hat{R}\times\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{R},t) = -4qa^2\,\frac{\omega^3}{c^3R}\;(\sin\theta\,\cos\theta)\,\sin 2\omega t_R\,\hat{\varphi}.$$

b)

c) La intensidad es

$$\frac{dP(\mathbf{R},t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}R^2\,|\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{R},t)|^2 = \frac{c}{4\pi}\left[4qa^2\,\frac{\omega^3}{c^3}\;(\sin\theta\,\cos\theta)\,\sin 2\omega t_R\right]^2,$$

y su valor medio es justo la mitad,

$$\left\langle\frac{dP(\mathbf{R})}{d\Omega}\right\rangle = \frac{c}{8\pi}\left(4qa^2\,\frac{\omega^3}{c^3}\;\sin\theta\,\cos\theta\right)^2.$$

d) Integrando en todo el ángulo sólido la potencia media total que atraviesa la esfera de radio R es

$$\langle P(R)\rangle = \int d\Omega\,\left\langle\frac{dP(\mathbf{R})}{d\Omega}\right\rangle = \frac{c}{8\pi}\left(4qa^2\,\frac{\omega^3}{c^3}\right)^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\;(\sin\theta\,\cos\theta)^2$$

$$= \frac{16c}{15}\left(qa^2\,\frac{\omega^3}{c^3}\right)^2.$$

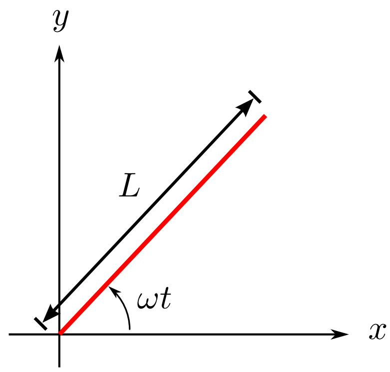
▪ **Problema 2**. Una varilla de longitud L está cargada uniformemente con densidad lineal λ. La varilla tiene un extremo fijo al origen y gira sobre el plano xy con velocidad angular ω, tal que a tiempo cero está sobre el eje x y además $\omega L/c = \alpha < 1$.

a) ¿Cuál es la forma aparente de la varilla a tiempo t vista desde el origen? Dar, por ejemplo, su ecuación en coordenadas polares, $\varphi_t(r)$ o $r_t(\varphi)$. Graficar cualitativamente. (3 pts)

b) Cada elemento de carga δq en la varilla tiene asociado un campo de aceleración

$$\delta\mathbf{E}_{\rm acel}(\mathbf{R},t) = \frac{\delta q}{c^2}\left\{\frac{1}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\,\frac{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\ddot{\mathbf{r}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3}\right\}_{t'}.$$

Calcular el campo de aceleración **en el origen** debido a toda la varilla. (Ojo, no el campo de radiación, sino el campo de aceleración completo). (7 pts)



■ **Solución.** a) La luz tarda un tiempo r/c en llegar al origen desde el punto de la varilla que se encuentra a una distancia r del origen. Esto quiere decir que la imagen de ese punto corresponde al tiempo retardado $t' = t - r/c$, cuando la varilla formaba un ángulo

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{1}$$

con el eje x. El extremo de la varilla fijo al origen siempre es observado en el instante $t' = t$, y el extremo más alejado en el instante $\omega(t - L/c) = \omega t - \alpha$. El primer caso corresponde al ángulo ωt y el segundo, al ángulo $\omega t - \alpha$. Puntos intermedios son observados en ángulos intermedios siguiendo la ec. (1). De manera que la forma aparente de la varilla a tiempo t está dada por la ecuación polar

$$\varphi_t(r) = \omega t - \frac{\omega r}{c}.$$

Ésta es una espiral de Arquímedes.

Si lo que se quiere es una demostración más formal, se debe considerar el cálculo del tiempo retardado para cada punto. La posición aparente, vista desde el origen, de un punto que gira a una distancia r del origen con velocidad angular constante ω es uno de los problemas más sencillos de posiciones aparentes. La ecuación para el tiempo retardado es

$$c(t - t') = |\mathbf{r}(t')| = r, \tag{2}$$

y su solución $t' = t - r/c$. Luego, si la posición del punto es, por ejemplo, $\mathbf{r}(t) = r\,\hat{r}(\omega t)$, entonces su posición aparente será

$$\mathbf{r}_{\rm ap}(t) = r\,\hat{r}\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right).$$

Si se tiene un conjunto de puntos parametrizados por r, todos moviéndose de la misma manera,

$$\mathbf{r}(t, r) = r\,\hat{r}(\omega t),$$

la imagen vista desde el origen corresponderá a este otro conjunto

$$\mathbf{r}_{\rm ap}(t, r) = r\,\hat{r}\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right).$$

Es decir, partiendo desde el origen, a medida que consideramos puntos cada vez más alejados, sus imágenes ocupan posiciones angulares cada vez más retrasadas respecto de la posición actual, ωt. Si el valor máximo de r es L, la imagen de la varilla barrerá los ángulos entre ωt y $\omega t - \omega L/c = \omega t - \alpha$. Puesto que la velocidad del extremo no puede ser mayor que la velocidad de la luz, el máximo valor posible de α es 1 rad $\approx 57°$. Es fácil demostrar que el ángulo entre la imagen de la varilla y la dirección radial depende de la distancia al origen como

$$\cos\xi = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2}}.$$

Debido a que este ángulo aumenta con r, la espiral tiende a ser tangente a los círculos centrados en el origen. En realidad, la limitación $\omega L < c$ implica que el máximo ángulo que forma en cada punto la imagen de la varilla con la dirección radial no puede ser mayor a $\pi/4$.

b) Imaginemos una carga δq que se mueve en un círculo de radio r, alrededor del origen en el plano xy, con velocidad angular constante ω. Fijemos el origen del tiempo de modo que su trayectoria sea

$$\mathbf{r}(t) = r\,\hat{r}(\omega t),$$

donde

$$\hat{r}(\varphi) = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}.$$

Su trayectoria aparente también es un círculo de radio r, con la misma frecuencia angular constante ω, pero atrasa respecto de la trayectoria real en un ángulo $\alpha_r = \omega r/c$,

$$\mathbf{r}_{\rm ap}(t) = r\,\hat{r}\left(\omega t - \alpha_r\right).$$

En otras palabras, $t' = t - r/c$. Para calcular su campo de aceleración en el origen,

$$\delta\mathbf{E}_{\rm acel}(t) = \frac{\delta q}{c^2}\left\{\frac{1}{r}\,\frac{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\ddot{\mathbf{r}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3}\right\}_{t'},$$

hay que tener en cuenta que

$$\mathbf{n}(t) = -\hat{r}(\omega t), \qquad \boldsymbol{\beta}(t) = \frac{\omega r}{c}\,\hat{\varphi}(\omega t), \qquad \ddot{\mathbf{r}}(t) = -\omega^2 r\,\hat{r}(\omega t).$$

Que el movimiento sea circular y que el punto de observación sea el origen simplifica varias cosas, en especial $\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n} = 0$ y $\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{r}} = 0$. Así resulta

$$\delta\mathbf{E}_{\rm acel}(t) = -\frac{\delta q}{c^2 r}\left[\mathbf{n}\times(\boldsymbol{\beta}\times\ddot{\mathbf{r}})\right]_{t-r/c} = \frac{\delta q}{c^2 r}\,\frac{\omega^3 r^2}{c}\,\hat{\varphi}\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right),$$

$$= r\,\delta q\,\left(\frac{\omega}{c}\right)^3\,\hat{\varphi}\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right).$$

Para calcular el campo de aceleración de toda la varilla habrá que integrar la contribución de cada elemento de carga $dq = \lambda\, dr$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\rm acel}(t) &= \int_0^L \lambda dr\; r\, \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \hat{\varphi}\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right) \\
&= \lambda \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \int_0^L dr\; r\, \left[\cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right)\hat{y} - \sin\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right)\hat{x}\right] \\
&= \lambda \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \left\{-\frac{Lc}{\omega}\,\hat{r}\left(\omega t - \frac{\omega L}{c}\right) + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left[\hat{\varphi}\left(\omega t - \frac{\omega L}{c}\right) - \hat{\varphi}(\omega t)\right]\right\} \\
&= \lambda \frac{\omega}{c}\Big[-\alpha\,\hat{r}\,(\omega t - \alpha) + \hat{\varphi}\,(\omega t - \alpha) - \hat{\varphi}(\omega t)\Big],
\end{aligned}
$$

donde $\alpha = \omega L/c$. No parece haber una forma verdaderamente cómoda de escribir este resultado. Lo que sí podemos hacer es dejarlo escrito en términos de dos versores ortogonales. Por ejemplo, usando que

$$
\hat{\varphi}(\omega t) = \cos\alpha\,\hat{\varphi}(\omega t - \alpha) - \sin\alpha\,\hat{r}(\omega t - \alpha),
$$

queda

$$
\mathbf{E}_{\rm acel}(t) = \lambda \frac{\omega}{c}\Big[(\sin\alpha - \alpha)\,\hat{r}\,(\omega t - \alpha) + (1 - \cos\alpha)\,\hat{\varphi}\,(\omega t - \alpha)\Big].
$$

■ **Problema 3**. Sobre una lámina dieléctrica de índice de refracción n, permeabilidad $\mu = 1$ y espesor $d' > 0$ incide en forma normal una onda plana polarizada linealmente, caracterizada por una frecuencia $\omega' > 0$ y un campo eléctrico de amplitud $\mathbf{E}_i' = E_i'\,\hat{z}$, como muestra la figura. Suponga que no hay onda reflejada.

a) Encuentre la condición de consistencia para que sea cierto que no haya onda reflejada y calcule la amplitud de la onda transmitida, $\mathbf{E}_t'$. (4 pts)

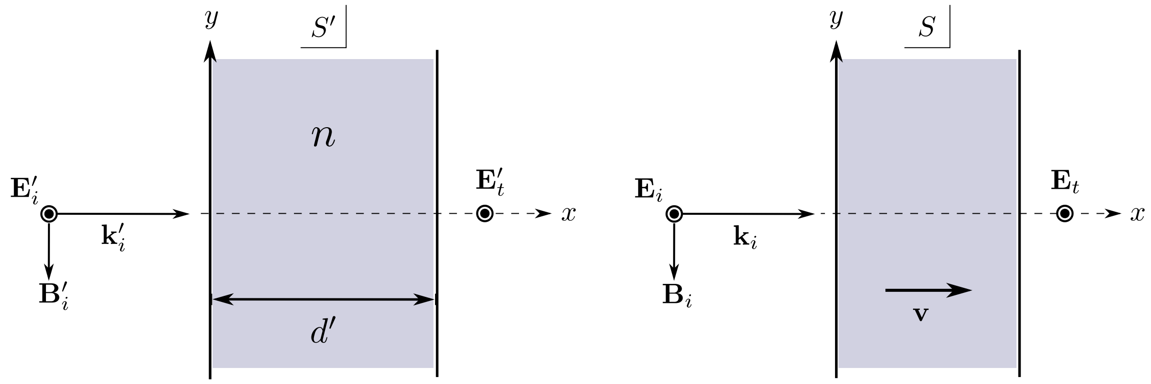
b) Fijados n y d', encuentre todos los valores de ω' tales que no haya onda reflejada. (1 pt)

En el sistema de laboratorio (sistema S) el dieléctrico se mueve con velocidad $\mathbf{v} = c\beta\,\hat{x}$, con $\beta > 0$. En este sistema la onda incidente tiene amplitud $\mathbf{E}_i = E_i\,\hat{z}$ y frecuencia ω.

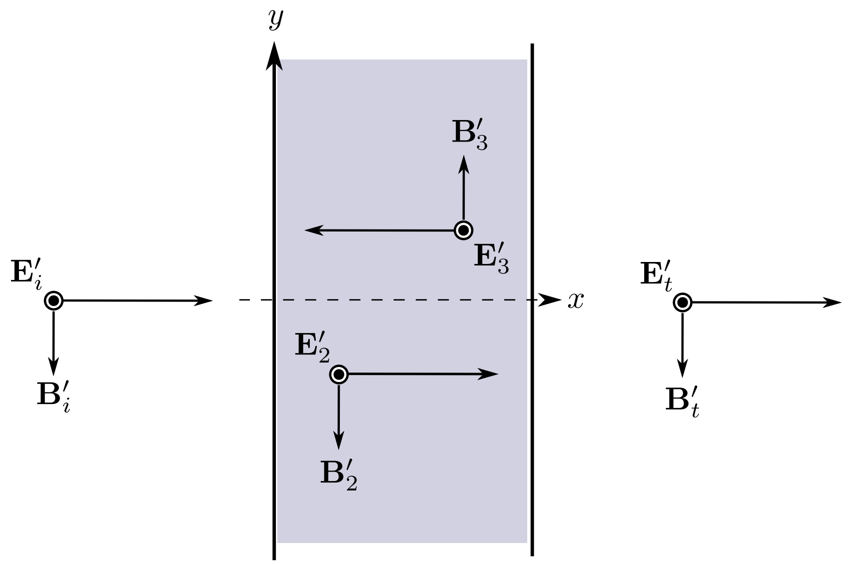
c) Suponiendo, como antes, que no hay onda reflejada, ¿cuál es la frecuencia y cuál es la amplitud de la onda transmitida en el sistema S? Los datos aquí, además de n, d' y β, son E_i y ω, no E_i' y ω'. (3 pts)

d) En términos de los datos n, d' y ω escriba la condición que debe satisfacer β para que no haya onda reflejada. (2 pts)

e) En S la onda incidente tiene frecuencia ω. Suponga que para $\beta = 0$ no hay onda reflejada. Al principio, si se aumenta la velocidad desde cero, aparecerá una onda reflejada. Ahora bien, ¿qué sucede con la onda reflejada a medida que se aumenta más y más la velocidad, desde 0 hasta c? ¿Hay valores de β para los cuales la onda reflejada desaparezca nuevamente? ¿Cuántos y cuáles son? (5 pts extra)



■ **Solución.** a) Estamos en el sistema en el que el dieléctrico está en reposo y tiene espesor d'. Asumiendo que no hay onda reflejada, para incidencia normal, los campos son como los de la figura:



Las condiciones de continuidad de $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{H}'$ tangenciales en cada interfase dan como resultado cuatro ecuaciones con sólo tres incógnitas, a saber:

$$E'_i = E'_2 + E'_3,$$

$$E'_i = n(E'_2 - E'_3),$$

$$E'_t = E'_2 e^{i\alpha} + E'_3 e^{-i\alpha},$$

$$E'_t = n\left(E'_2 e^{i\alpha} - E'_3 e^{-i\alpha}\right), \tag{3}$$

donde $\alpha = nk'd' = n\omega' d'/c$ es la fase que acumulan los campos a lo largo del espesor de la lámina. En cada interfase intervienen sólo tres campos. Del primer par de ecuaciones se obtiene

$$E'_2 = \frac{n+1}{2n}\,E'_i, \qquad E'_3 = \frac{n-1}{2n}\,E'_i.$$

Estos resultados son fáciles de interpretar, porque el problema es idéntico al problema usual de una interfase con tres campos, sólo que revertido en el tiempo, y en lugar de dejar las cosas escritas en términos del campo *incidente* (que aquí sería E_2'), las estamos escribiendo en términos del campo *transmitido* (que aquí sería E_i'). Reemplazando estos resultados en la tercera ecuación (3) resulta

$$E_t' = \frac{1}{2n}\left[(n+1)e^{i\alpha} + (n-1)e^{-i\alpha}\right] E_i'. \tag{4}$$

Para que la cuarta ecuación (3) sea compatible con las tres anteriores debe ser

$$\left[(n+1)e^{i\alpha} + (n-1)e^{-i\alpha}\right] = n\left[(n+1)e^{i\alpha} - (n-1)e^{-i\alpha}\right],$$

lo que implica

$$(n+1)(n-1)e^{i\alpha} = (n-1)(1+n)e^{-i\alpha} = 0.$$

Finalmente, la condición de compatibilidad buscada es

$$e^{2i\alpha} = 1.$$

Explícitamente, debe ser

$$\alpha = \frac{n\omega'}{c}\,d' = m\pi, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

En función de la longitud de onda en el dieléctrico $\lambda_n' = \dfrac{2\pi c}{n\omega'}$ la condición para que no haya onda reflejada es

$$d' = m\frac{\lambda_n'}{2},$$

lo que tiene una interpretación evidente pensando al problema en términos de reflexiones múltiples: si el espesor de la lámina dieléctrica es un número entero de semilongitudes de onda, entonces en la primera interfase siempre habrá interferencia destructiva, y siempre habrá interferencia constructiva en la segunda. (Es importante tener en cuenta que la primera reflexión es en la interfase vacío$-$dieléctrico, y por lo tanto implica una fase extra de π). Con todo esto ya podemos escribir el campo transmitido. A partir de la ec. (4) y usando la condición de compatibilidad, resulta

$$E_t' = \frac{e^{i\alpha}}{2n}\left[(n+1) + (n-1)e^{-2i\alpha}\right] E_i' = e^{i\alpha}\,E_1',$$

$$= (-1)^m\,E_i'.$$

b) Se trata de escribir la condición de compatibilidad como

$$\omega' = m\,\frac{\pi c}{nd'}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

c) Ahora entra en juego el sistema de laboratorio, donde la lámina dieléctrica se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{x}$. Debido a que la incidencia es normal en S', y puesto que S' se mueve respecto de S con velocidad paralela a la normal a la interfase, en S la incidencia también será normal y los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ de cada onda mantendrán las mismas direcciones que en S'. El dato es la amplitud de la onda incidente en S, $\mathbf{E}_i = E_i\,\hat{z}$. En S', donde el dieléctrico está en reposo, será

$$\mathbf{E}'_i = \gamma(\mathbf{E}_i + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_i) = \gamma(1-\beta)\,\mathbf{E}_i. \tag{5}$$

Por otro lado, la frecuencia de la onda incidente en S' será

$$\omega' = \gamma(1-\beta)\,\omega = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\omega.$$

En S' todas las ondas comparten la misma frecuencia ω'. La amplitud de la onda transmitida en S' es la calculada en el ítem (a),

$$\mathbf{E}'_t = (-1)^m\,\mathbf{E}'_i. \tag{6}$$

En S será

$$\mathbf{E}_t = \gamma(\mathbf{E}'_t - \beta\mathbf{B}_t) = \gamma(1+\beta)\,\mathbf{E}'_t.$$

Usando los resultados (5) y (6) obtenemos

$$\mathbf{E}_t = (-1)^m\gamma^2(1+\beta)(1-\beta)\,\mathbf{E}_i = (-1)^m\,\mathbf{E}_i.$$

Era un resultado esperable, porque si no hay onda reflejada y el problema es estacionario, entonces por conservación de la energía el módulo de la amplitud del campo transmitido tiene que ser igual al del incidente. La frecuencia del campo transmitido es

$$\omega_t = \gamma(1+\beta)\omega' = \gamma^2(1+\beta)(1-\beta)\omega = \omega.$$

Debería resultar evidente que calcular la frecuencia de la onda transmitida en S a partir de ω' es equivalente a calcular la frecuencia de la onda incidente en S a partir de ω'. Pero esto no es más que la operación inversa que lleva de ω a ω', y por lo tanto el resultado es ω.

d) Según vimos, la condición para que no haya onda reflejada es

$$\frac{nd'}{c}\,\omega' = m\pi, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Pero si se toma como dato ω, resulta

$$\frac{nd'}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\omega = m\pi.$$

El resultado anterior puede pensarse como una condición para β,

$$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = m\,\frac{\pi c}{\omega n d'}. \tag{7}$$

e) Se sabe que para $\beta = 0$ no hay onda reflejada; por lo tanto, según el resultado del ítem anterior,

$$m_0\,\frac{\pi c}{\omega n d'} = 1,$$

para cierto entero m_0. El entero m_0 que hace cierta esta igualdad es

$$m_0 = \frac{\omega n d'}{\pi c}.$$

Si se aumenta β, la función $\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$ decrece, y por lo tanto sólo puede haber otro valor de β donde se cumpla la condición (7) si existe algún entero m_1 menor que m_0 pero mayor o igual que 1. Es decir, si $m_0 \geq 2$. Habrá tantos valores de $\beta > 0$ para los que no haya onda reflejada como enteros menores que m_0 y mayores o iguales que 1. Despejando resulta

$$\beta_j = \frac{1-x_j^2}{1+x_j^2},$$

donde

$$x_j = m_j\,\frac{\pi c}{\omega n d'},$$

con $m_j = m_0-1, m_0-2, \ldots, 1$, siempre que $m_0 \geq 2$. Es fácil entender porque no hay un número infinito de valores de β. La cuestión es que como el dieléctrico viaja en el mismo sentido que la onda incidente, la frecuencia en S' disminuye al aumentar la velocidad. Si la frecuencia disminuye, entonces la longitud de onda aumenta, e inevitablemente habrá un valor máximo de β para el cual $\lambda'_n/2$ será mayor que d'. A partir de ahí ya no puede cumplirse la condición para que no haya onda reflejada. Si el dieléctrico viajara en sentido opuesto al de la onda incidente, ahí sí habría un conjunto infinito de valores de β tales que no haya onda reflejada.

Fórmulas útiles incluidas en la hoja del parcial:

- La intensidad (potencia por unidad de ángulo sólido) del campo de radiación en un punto $\mathbf{R}$ a tiempo t:

$$I(\mathbf{R},t) = R^2\,\mathbf{S}(\mathbf{R},t)\cdot\hat{R}, \qquad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$

- El campo de radiación hasta orden $1/c$ para un sistema acotado:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R},t) = \frac{\hat{R}}{c^2R}\times\left[\hat{R}\times\ddot{\mathbf{d}} + \frac{\hat{R}\times\dddot{\mathbf{D}}}{6c} + \ddot{\mathbf{m}}\right]_{t_R}, \ \text{donde}\ \mathbf{D} = \hat{R}\cdot\mathbf{Q}, \ \ \text{y}\ \ \mathbf{Q} = \int d^3r\,\rho(\mathbf{r},t)\left[3\,\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2\mathbf{I}\right].$$

- $\int dx\; x\cos(a-bx) = -\frac{x}{b}\sin(a-bx) + \frac{1}{b^2}\cos(a-bx)$.
  $\int dx\; x\sin(a-bx) = \frac{x}{b}\cos(a-bx) + \frac{1}{b^2}\sin(a-bx)$.

Fórmulas útiles dadas durante el parcial:

- $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$
- $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x$

Se aprobaba con un mínimo de 15 puntos y dos problemas con un mínimo de 5.