FÍSICA TEÓRICA 1 - 1er. Cuatrimestre 2016

Guía 2: Función de Green, imágenes y separación de variables

1. Una esfera conductora de radio a está conectada a potencial V y rodeada por una cáscara esférica de radio b cargada uniformemente con densidad σ.

   (a) Hallar el potencial electrostático por superposición a partir de la solución por imágenes del problema de una carga frente a una esfera.

   (b) Encontrar la distribución de cargas imagen y la carga total inducida sobre la esfera conductora.

   (c) ¿Puede encontrar otras distribuciones *imagen* que resuelvan el problema?

2. (a) Hallar el potencial electrostático del problema anterior usando la función de Green.

   (b) Analizar la relación entre el método de imágenes y el de la función de Green. Identificar la procedencia de cada una de las tres contribuciones a la integral de Green.

3. (a) Una esfera de radio a está conectada a tierra. A una distancia de su centro $d > a$ hay un dipolo puntual $\mathbf{p}$. Calcular el potencial en todo el espacio usando el método de la función de Green.

   (b) Ídem (a) pero mediante el método de imágenes. Verificar que ambos resultados coinciden.

   (c) Calcular la densidad de carga y la carga total inducidas sobre la esfera.

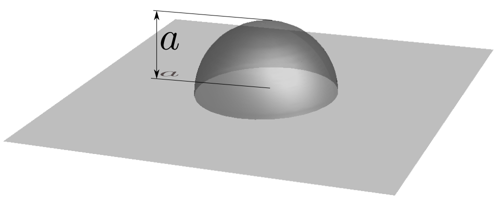
   (d) Escribir el potencial para $r \gg a$ conservando términos de hasta orden $(a/r)^2$. Interprete en términos de la carga total y del momento dipolar total de las cargas fuente e imagen.

   (e) Encuentre ahora el potencial en el caso en que la esfera está aislada y descargada.

4. Mediante el método de imágenes hallar la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región entre dos esferas concéntricas de radios a y b. *Sugerencia*: es necesario usar una serie infinita de imágenes. Hallar primero relaciones de recurrencia para las ubicaciones y los módulos de las cargas imágenes; resolver esas relaciones y luego escribir la superposición adecuada en forma de suma infinita.

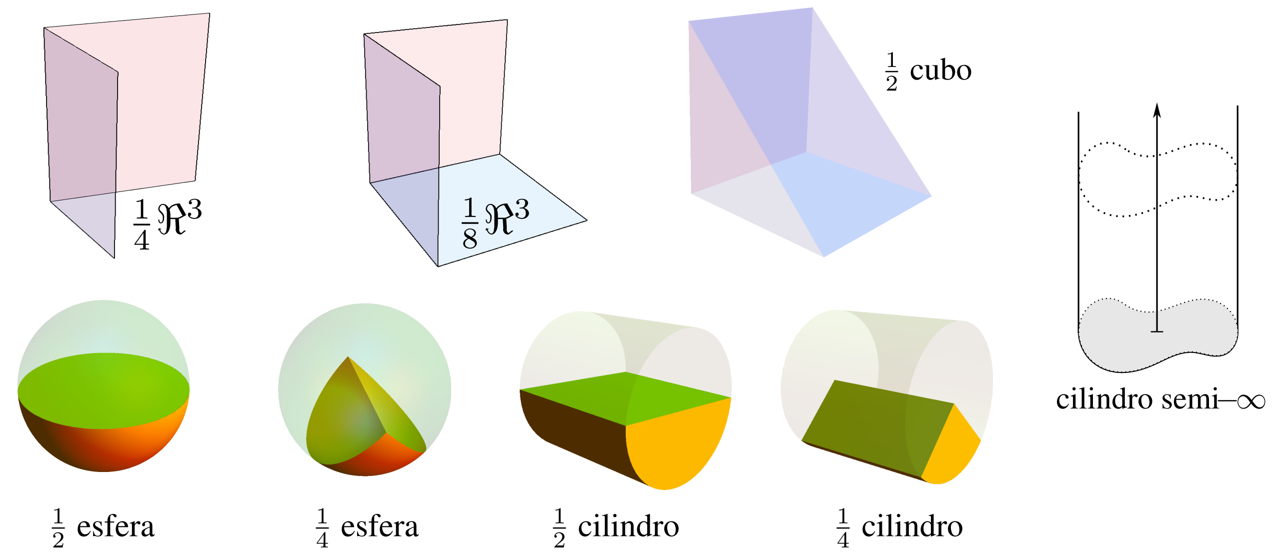
5.* Bastante más complicado que el anterior: los centros de dos esferas conductoras de radio a están a una distancia $2a$ uno del otro, de modo que las esferas se tocan en un sólo punto. Las esferas están aisladas, y cada una tiene carga q. Encontrar el potencial en todo el espacio. *Sugerencia*: empiece suponiendo que cada esfera se reemplaza por una carga puntual de valor Q ubicada en su centro. Obtenga las relaciones de recurrencia para las sucesivas cargas imágenes y sus posiciones. Como en el problema anterior, estas relaciones estarán acopladas. Busque eliminar las posiciones para obtener relaciones de recurrencia que sólo involucren los valores de las cargas. Esas relaciones serán fáciles de resolver. Finalmente, calcule la suma de las cargas imágenes dentro de cada esfera y ajuste el valor de Q para que esa carga sea igual a q. (Relacionado con esto, ver Smythe, § 6.081. *Difference Equations. Two Spheres*, y el último párrafo de la sección 6.9 del curso de Feynman, vol. 2.)

6. Un contorno mixto consiste en un plano infinito y una semiesfera de radio a, como muestra la figura.

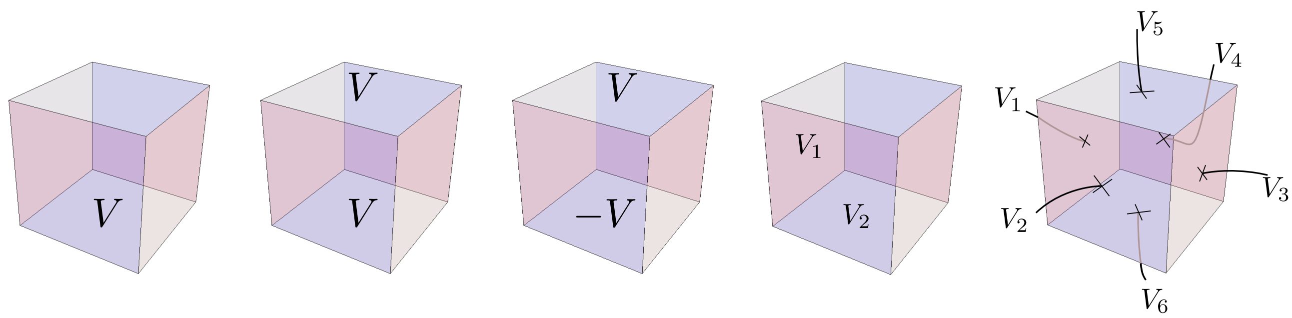


Calcular la función de Green de Dirichlet en la región que queda por encima del contorno. Identificar cada contribución.

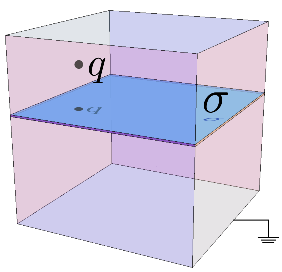
7. (Cero cuentas.) Las funciones de Green de Dirichlet del espacio no acotado, de la esfera, del interior de un cubo, del interior de un cilindro finito de base circular y del interior de un cilindro infinito de sección arbitraria se suponen conocidas. Usando argumentos de simetría, escriba en términos de estas funciones de Green las funciones de Green en el interior de los siguientes recintos:



8. Un cubo de lado a tiene sus tapas al potencial que muestra cada figura. Las tapas donde no se indica ningún valor del potencial están a tierra. Encontrar el potencial en el interior del cubo en cada caso.



9. Un cubo de lado a está conectado a tierra. En su interior hay un cuadrado con densidad superficial uniforme σ y una carga puntual q. Calcule el potencial en *todo el espacio*.



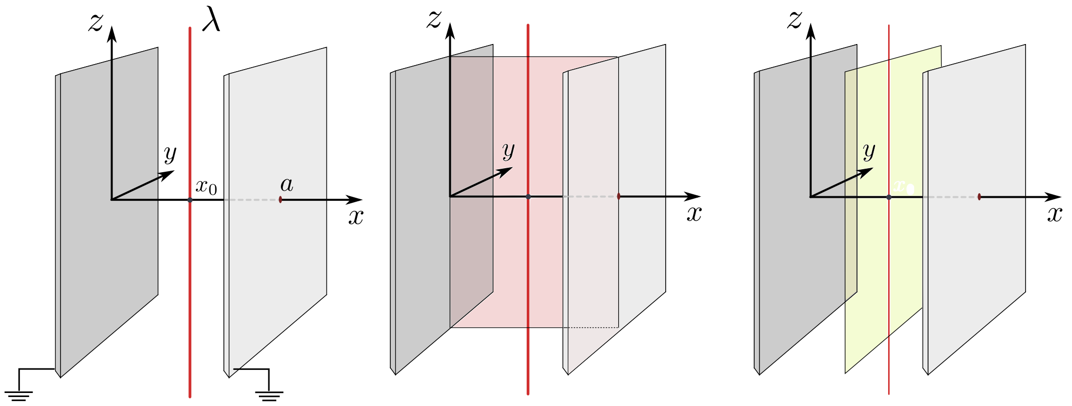
10. Un hilo infinito con densidad de carga constante λ está equidistante a dos placas conductoras infinitas, paralelas, separadas una distancia a y conectadas a tierra. Utilizando separación de variables encuentre el potencial en *todo el espacio*. Para ello divida la región entre las placas de los siguientes modos:

(a) Con un corte vertical perpendicular a los planos.

(b) Con un corte vertical paralelo a los planos.

(c) ¿Se atreverá a demostrar la igualdad de las dos soluciones anteriores?

(d)* Tanto la integral como la suma de Fourier que han aparecido al aplicar las dos separaciones pueden hacerse de manera explícita y la solución es una función simple. Encuentre esa función.



11. (a) Encuentre por separación en cartesianas la función de Green de Dirichlet del espacio no acotado. Para eso, divida el espacio en dos en regiones con un plano paralelo al plano xy; la solución debe quedar escrita en la forma

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \; e^{i[k_x(x-x')+k_y(y-y')]} \; \phi(k_x, k_y) \; f_{k_x k_y}(z - z').$$

(b) Encuentre la función de Green de Dirichlet del espacio no acotado proponiendo para G un desarrollo de Fourier tridimensional,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d^3\mathbf{p} \; e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \; \phi(\mathbf{p}),$$

y resolviendo directamente la ecuación de Poisson, $\nabla^2_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

(c)* Comparando las dos formas de la función de Green del espacio no acotado obtenidas en los ítems anteriores, encuentre la transformada de Fourier de la función $f(z) = e^{-\kappa|z|}/\kappa$.

12. Hallar el potencial en todo el espacio producido por un cuadrado de lado a cargado con densidad uniforme σ. El cuadrado está sobre el plano xy, su centro coincide con el origen y sus lados están alineados con los ejes x e y. Utilice los siguientes métodos:

(a) Separación de variables dividiendo el problema en dos zonas.

(b) Usando la expresión de la función de Green obtenida en el problema 11a.

(c) Usando la expresión de la función de Green obtenida en el problema 11b.

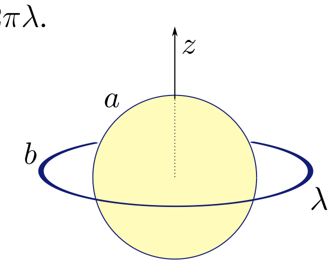
13. Encuentre la función de Green para el problema de Dirichlet en el interior de un cilindro infinito de sección cuadrada de lado a (es decir, $0 \leq x, y \leq a$, $-\infty < z < \infty$).

14. Ídem al anterior pero para un cilindro cuadrado semiinfinito (ahora $0 \leq z < \infty$).

15. Calcular el potencial electrostático en todo el espacio para una esfera cuya mitad superior está a potencial V_1 y la inferior a V_2. (*Sugerencia*: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.)

16. (a) Por separación de variables, encontrar el potencial de una carga puntual q entre dos cáscaras esféricas conductoras, concéntricas y conectadas a tierra, de radios a y b, con $a < b$.
    (b) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre cada esfera.
    (c) En los resultados anteriores, tomar $b \longrightarrow \infty$. Comparar con el problema externo de una esfera.
    (d) Resolver el problema en el caso en que el potencial de las esferas es V_1 y V_2.
    (e) Resolver el problema en el caso en que las esferas están aisladas y tienen una carga total Q_1 y Q_2.
    (f)* En el problema 4 el potencial de una carga entre dos esferas quedó escrito como una suma infinita. Usando la expansión de la función $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ en armónicos esféricos, reobtenga el resultado del ítem (a) calculando explícitamente la suma infinita del problema 4.

17. Una esfera de radio a está a tierra. Concéntrico con ella hay un anillo de radio $b > a$, cargado uniformemente con carga total $Q = 2\pi\lambda$.



    (a) Calcular el potencial en todo el espacio usando el método de la función de Green.
    (b) Calcular el potencial sobre el eje perpendicular al plano del anillo utilizando el método de imágenes. Luego, extender la solución para todos los puntos exteriores a la esfera mediante prolongación analítica (Jackson, sección 3.3, donde dice "Series (3.33), with its coefficients determined by the boundary..."). Comparar con el resultado del punto (a).
    (c) Calcular el potencial usando separación de variables y comparar con los resultados anteriores.
    (d) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre la esfera. ¿Qué tiene esto que ver con el método de imágenes?
    (e) ¿Cómo resolvería el problema si la esfera estuviera aislada y descargada?

    Fórmulas útiles: $P_{2n+1}(0) = 0$, $P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{2^n n!}$, $P_0(x) = 1$.

18. Un cilindro de radio a y altura h tiene su superficie lateral conectada a tierra, mientras que las tapas se mantienen a potenciales V y $-V$. Hallar el potencial en el interior del cilindro.

19. (a) Usando separación de variables en coordenadas cilíndricas, hallar el potencial producido por un disco de radio a cargado con densidad uniforme σ.
    (b) ¿Puede el disco uniformemente cargado ser conductor? *Sugerencia:* no es sencillo demostrarlo a partir de las expresiones integrales, a menos que usted sea Gradshteyn and Ryzhik en persona.
    (c) Verificar que para puntos muy lejanos al disco el potencial se reduce al de una carga puntual, mientras que para puntos muy cercanos al origen se aproxima al de un plano infinito.

20. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de un cilindro circular de radio a y longitud L, separando en regiones de las siguientes maneras:

    (a) Cortando con un plano perpendicular al eje del cilindro.

    (b) Cortando con un cilindro coaxial al cilindro original.

21. Ídem al problema anterior pero para un cilindro de longitud infinita. Encuentre también la función de Green para el problema externo utilizando el segundo tipo de corte. ¿Sabría cómo resolver el problema externo usando el primer tipo de corte?

22. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de una estructura con forma de cuarto de cilindro circular, infinito y de radio a, siguiendo estos dos caminos:

    (a) Usando separación de variables en el cuarto de cilindro a partir de la ecuación para $\nabla^2\Phi$ en coordenadas cilíndricas y con condiciones de contorno adecuadas en $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi/2$.

    (b) Usando imágenes y la función de Green para el cilindro infinito obtenida en el problema anterior.

    (c)* Además del problema del cuarto de cilindro, que corresponde a un ángulo de $\pi/2$ entre las tapas planas laterales, ¿para qué otros valores de ese ángulo puede resolverse el problema usando imágenes?

23. (a) Utilizando separación de variables en coordenadas cilíndricas, calcular la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región interna entre dos planos infinitos, ubicados en $z = 0$ y $z = L$.

    (b) Si se coloca una carga q a una altura z entre los planos, obtener una expresión para la densidad de carga y calcular explícitamente la carga **total** inducida sobre cada plano.

    (c)* Observe que, si bien la densidad superficial no tiene una expresión muy simple, el resultado para la carga total es llamativamente simple. La carga total sobre cada plano puede obtenerse de consideraciones más generales que no requieren calcular el potencial explícitamente. Lo que se usa es el llamado Teorema de Reciprocidad. Entre los problemas del capítulo 1 del Jackson figura este teorema y su aplicación al caso de los dos planos. En la tercera edición son los problemas 1.12 y 1.13. Quedan propuestos como problemas opcionales.

    (d)* Encuentre la función de Green mediante el método de imágenes. Para comparar esta suma infinita con el resultado del ítem (a), en cada término de la suma use alguno de los desarrollos de la función $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ en términos de funciones de Bessel y haga la suma explícitamente.

    (e) En otros problemas, incluidos el de una carga frente a un único plano y el de una carga frente a una esfera, se vio que la carga sobre los conductores era igual al valor de las cargas imágenes ubicadas en su interior. ¿Qué argumentos se usaban para afirmar eso sin necesidad de integrar la distribución de carga sobre los conductores? Ahora bien, en el ítem (b) se calculó la carga total en cada plano. ¿Qué ocurre en este problema con la suma de las cargas imágenes de cada plano?