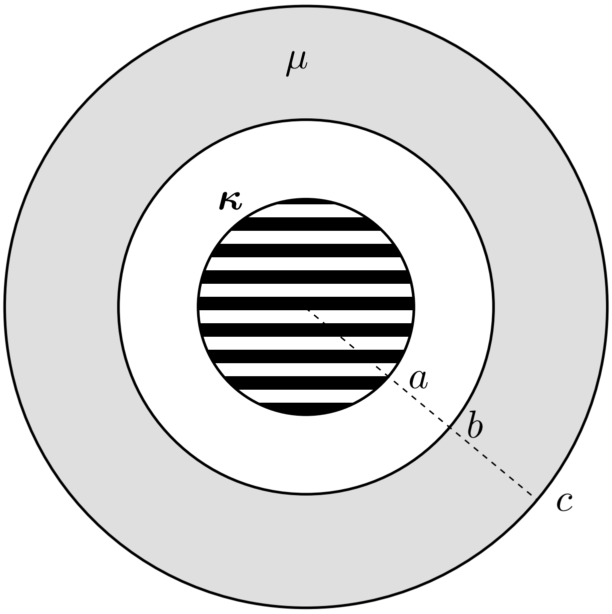
FÍSICA TEÓRICA 1 – 1er. Cuatrimestre 2016

Un problema de magnetostática

Se trata de un problema que combina corrientes libres y medios materiales: una esfera de radio a centrada en el origen tiene una densidad superficial de corriente libre

$$\boldsymbol{\kappa}(\theta,\varphi) = \kappa_0 \sin\theta\ \hat{\varphi}(\varphi). \tag{1}$$

La esfera está en el centro de una cáscara esférica de radios b y c, con $a < b < c$. El interior de la cáscara, $b < r < c$, está ocupado por un medio magnético lineal y homogéneo con permeabilidad μ. Se pide encontrar el campo magnético en todo el espacio.



Si se piensa el problema desde el punto de vista de $\mathbf{B}$,

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_L + 4\pi\nabla\times\mathbf{M},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

aparece la dificultad de que no se conocen todas las fuentes (aunque podríamos intentar expresar $\mathbf{M}$ en términos del propio $\mathbf{B}$). Y si se lo piensa desde el punto de vista de $\mathbf{H}$, la dificultad está en que al haber corrientes libres el rotor de $\mathbf{H}$ no es cero, y por lo tanto no puede escribirse como el gradiente de un campo escalar continuo y univaluado.

Ahora bien, puesto que las corrientes libres son conocidas (la densidad de corriente en la superficie de la esfera de radio a), su contribución al campo magnético puede calcularse explícitamente, por ejemplo a partir del potencial vector

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int d^3\mathbf{r}'\ \frac{\mathbf{j}_L(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad \mathbf{B}_L = \nabla\times\mathbf{A}_L. \tag{3}$$

El subíndice L es un recordatorio de que estos campos están asociados únicamente a las corrientes libres. Debido a que la corriente libre es superficial, termina quedando una integral de superficie:

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int a^2 d\Omega' \, \frac{\boldsymbol{\kappa}(\theta', \varphi')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{4}$$

Si no hubiera más que corrientes libres, el problema estaría resuelto. La cuestión es encontrar la contribución al campo magnético que viene de las corrientes de magnetización. Para eso, escribamos el campo total como una parte conocida (la contribución de las corrientes libres, $\mathbf{B}_L$) más una parte generada por las corrientes de magnetización, a la que llamaremos $\mathbf{B}_M$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_M. \tag{5}$$

Este campo total satisface la ecuación con las fuentes completas,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_M) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_L + 4\pi\nabla \times \mathbf{M}. \tag{6}$$

Por construcción $\nabla \times \mathbf{B}_L = 4\pi\mathbf{j}_L/c$, de modo que

$$\nabla \times \mathbf{B}_M = 4\pi\nabla \times \mathbf{M}. \tag{7}$$

El hecho de que en esta ecuación no haya otras corrientes que las de magnetización permite introducir un campo $\mathbf{H}_M = \mathbf{B}_M - 4\pi\mathbf{M}$, tal que

$$\nabla \times \mathbf{H}_M = 0, \tag{8}$$

y por lo tanto $\mathbf{H}_M = -\nabla\phi$. Las cosas se simplifican más todavía: como el medio es lineal y homogéneo, las cargas de magnetización (únicas fuentes de $\mathbf{H}_M$ en ausencia de corrientes libres), estarán confinadas en las interfases. Así, dentro de cada una de las tres regiones definidas por $0 \leq r < b$, $b < r < c$ y $c < r$ el potencial escalar verificará la ecuación de Laplace, $\nabla^2\phi = 0$. En las interfases, la presencia de las cargas de magnetización se tendrá en cuenta al pedir la continuidad del campo magnético normal. No es necesario calcular explícitamente las cargas de magnetización que dan origen a ϕ.

Resumiendo: por un lado tenemos el campo $\mathbf{B}_L$ de la esfera de radio a y densidad de corriente superficial $\boldsymbol{\kappa}(\theta, \varphi)$. Por otro lado tenemos un campo $\mathbf{B}_M$, cuyo origen son las corrientes de magnetización desconocidas. El campo $\mathbf{B}_M$ puede obtenerse a partir de un campo $\mathbf{H}_M$, que a su vez es el gradiente de un potencial escalar que satisface Laplace, salvo en las interfases. Debido a que las fuentes de este campo escalar son distribuciones esféricas de carga superficial, ϕ se podrá escribir usando la expresión genérica del campo producido por una tal distribución superficial. Habrá dos contribuciones, una debida a las cargas en $r = b$ y otra a las cargas en $r = c$. En definitiva, lo que estamos diciendo es que

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \, P_l(\cos\theta) \, \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\right)_b + \sum_{l=0}^{\infty} B_l \, P_l(\cos\theta) \, \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\right)_c. \tag{9}$$

Los subíndices b y c indican que la comparación que define $r_<$ y $r_>$ es, en un caso, entre r y b, y en el otro entre r y c. Se ha tenido en cuenta además la simetría azimutal del problema. Los dos conjuntos de incógnitas son las constantes A_l y B_l. Los dos conjuntos de ecuaciones necesarios para determinar estas constantes saldrán de pedir la continuidad de la componente normal de $\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_M$ en cada interfase. Notemos que esta condición debe valer por separado* para el campo $\mathbf{B}_L$ y para el campo $\mathbf{B}_M$. La continuidad de $\mathbf{B}$ normal es consecuencia de la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Por construcción $\nabla \cdot \mathbf{B}_L = 0$, ya que se trata del campo calculado teniendo en cuenta ciertas fuentes conocidas. Luego, si $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, entonces necesariamente debe ser $\nabla \cdot \mathbf{B}_M = 0$, y por lo tanto la componente normal de $\mathbf{B}_M$ debe conservarse de manera independiente.

Escribamos esta condición en la interfase $r = b$. Para $r < b$ es

$$\mathbf{B}_M = \mathbf{H}_M = -\nabla\phi. \tag{10}$$

Hasta aquí no hay dudas. El paso problemático es relacionar correctamente $\mathbf{B}_M$ y ϕ del otro lado de la interfase, cuando $b < r < c$. Aquí hay que prestar mucha atención, porque no es cierto que $\mathbf{B}_M$ sea igual a $\mu\mathbf{H}_M$, como uno estaría tentado de escribir. En efecto, según nuestra definición es

$$\mathbf{B}_M = \mathbf{H}_M + 4\pi\mathbf{M}, \tag{11}$$

pero $\mathbf{M}$, obviamente, depende del campo completo. La relación entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{M}$ para un medio lineal es

$$4\pi\mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{\mu}\mathbf{B}. \tag{12}$$

Esto implica

$$\mathbf{B}_M = \mathbf{H}_M + \frac{\mu - 1}{\mu}\left(\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_M\right),$$

$$\to \mathbf{B}_M = \mu\mathbf{H}_M + (\mu - 1)\,\mathbf{B}_L. \tag{13}$$

Debería resultar evidente que si escribieran $\mathbf{B}_M = \mu\mathbf{H}_M$, no habría manera de hacer intervenir el campo magnético $\mathbf{B}_L$ en el problema para $\mathbf{B}_M$. Serían dos problemas desconectados. En particular (si siguen la cuenta hasta al final), encontrarían que $\mathbf{B}_M = 0$, lo que es absurdo. El campo magnético de la esfera con corriente tiene que magnetizar a la cáscara que la rodea. No debe creerse que existe una inconsistencia entre la ecuación habitual $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ y la ec. (13), porque lo que aparece en esta ecuación no es el campo $\mathbf{H}$ del problema completo, sino un campo auxiliar que está asociado sólo a las corrientes de magnetización.

Lo anterior es un comentario al margen. Volviendo al problema, finalmente la relación entre $\mathbf{B}_M$ y $\mathbf{H}_M$ dentro de la cáscara es

$$\mathbf{B}_M = \mu\mathbf{H}_M + (\mu - 1)\,\mathbf{B}_L = -\mu\nabla\phi + (\mu - 1)\,\mathbf{B}_L. \tag{14}$$

Con esto ya tienen todo lo necesario para escribir las dos condiciones en $r = b$ y $r = c$ y obtener las constantes A_l y B_l. Esto queda como ejercicio.

Respecto al cálculo de $\mathbf{B}_L$ diremos algo más. Un camino posible es, como ya señalamos, calcular la integral de Poisson para $\mathbf{A}_L$, y luego calcular $\nabla \times \mathbf{A}_L$. Para hacer la integral habrá que usar el desarrollo de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$

*Corrección respecto de lo dicho en clase en un momento de ofuscación.

en armónicos esféricos. Si hicieron el problema del imán esférico, verán que allí se pide hacer este mismo cálculo, ya que la corriente superficial del imán esférico tiene justamente la misma forma que la corriente propuesta para la esfera del problema que estamos considerando ahora. Pero una vez que advierten esta equivalencia, ya no es necesario resolver la integral de Poisson, porque hay métodos más sencillos para calcular el campo del imán. Este campo puede obtenerse a partir de un potencial escalar, así que el asunto de obtener $\mathbf{B}_L$ termina siendo bastante simple. Noten que esto da un camino inesperado y más directo para resolver todo el problema, no sólo $\mathbf{B}_L$: desde el comienzo podríamos haber reemplazado la distribución de corriente libre por un imán esférico con una magnetización adecuada (¿cuál?). En este problema equivalente, no hay corrientes libres: hay un imán y una cáscara magnetizable y todo puede resolverse introduciendo un campo $\mathbf{H} = -\nabla\phi$. Sería conveniente que resolvieran el problema siguiendo los dos caminos: separar en un campo externo $\mathbf{B}_L$ y un campo de magnetización $\mathbf{B}_M$ como hicimos más arriba, o reemplazar la esfera con corriente por un imán esférico. Verifiquen que los dos caminos den el mismo resultado.

Para terminar, respecto al segundo camino: noten que no siempre será sencillo reemplazar las corrientes libres por un imán simple, con una magnetización constante. Además puede ser que ni siquiera les digan cuáles son las corrientes libres, sino simplemente que hay cierto campo externo $\mathbf{B}_L$ dado. Ejemplo de este último tipo de problemas sería calcular el campo magnético cuando una esfera con permeabilidad μ se introduce en una región del espacio donde hay inicialmente un campo magnético externo homogéneo.