FÍSICA TEÓRICA 1 $-$ 1er. de Cuatrimestre 2016

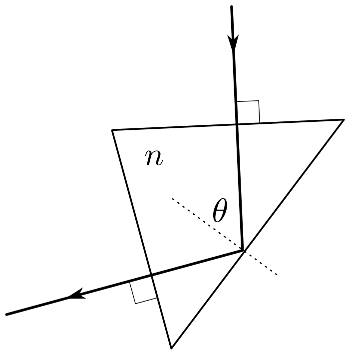
Guía 5: Ondas planas

1. Sobre una superficie vidrio$-$vacío incide desde el vidrio (índice n real) una onda plana linealmente polarizada con polarización TM, con un ángulo mayor que el ángulo límite.

   (a) Mostrar que en la zona de vacío no hay flujo de vector de Poynting en la dirección normal.

   (b) Si la onda en la situación anterior incidiera además con el ángulo de Brewster, no habría tampoco onda reflejada: ¿es esto posible?

2. Una onda plana, polarizada a $45°$ respecto del plano de incidencia, es totalmente reflejada (reflexión total interna) por un prisma, al cual entra y sale normalmente.

   Demostrar que la intensidad del rayo emergente es $16n^2/(1+n)^4$ veces la intensidad incidente, donde n es el índice de refracción del prisma. Demostrar que el rayo emergente está elípticamente polarizado, con un desfasaje

   $$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{\cos\theta}{(\sin\theta)^2}\sqrt{(\sin\theta)^2 - n^{-2}},$$

   donde θ es el ángulo de incidencia en la cara posterior del prisma. No considerar reflexiones múltiples y tomar $\mu = 1$ en todo el espacio.

3. Una lámina dieléctrica de permitividad ϵ_2 y espesor d separa dos medios semiinfinitos que tienen permitividades ϵ_1 y ϵ_3, respectivamente ($\mu = 1$ en todo el espacio). Una onda plana incide sobre la interfase que separa los medios 1 y 2, formando un ángulo θ con la normal.

   (a) Escriba el sistema de ecuaciones que determina todos los campos.

   (b) Resuelva las ecuaciones para los campos. En particular, demuestre que el campo reflejado hacia el primer medio y el transmitido hacia el tercero tienen las siguientes amplitudes respecto del campo incidente

   $$\frac{E_r}{E_i} = \frac{R_{12} + R_{23}e^{2i\alpha}}{1 + R_{12}R_{23}\,e^{2i\alpha}}, \qquad \frac{E_t}{E_i} = \frac{T_{12}T_{23}e^{i\alpha}}{1 + R_{12}R_{23}\,e^{2i\alpha}},$$

   donde R_{ij} y T_{ij} son los coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión para una sola interfase y $\alpha = n_2\omega d/c$.

(c) Para $\theta = 0$, calcule el promedio temporal de los vectores de Poynting en los tres medios. Demuestre que son iguales. (Puede ser útil saber que: $T_{ij}T_{ji} = 1 - R_{ij}^2$ y que $R_{ij} = -R_{ji}$.)

(d) Para $\theta = 0$, qué condición deben cumplir d y los ϵ_i para que no haya onda reflejada en el medio 1.

4. (Jackson, problema 7.5) Una onda plana linealmente polarizada de amplitud E_i incide normalmente desde el vacío sobre una lámina de espesor d de un muy buen conductor ($\delta \ll \lambda$). Puede asumirse que $\epsilon = \mu = 1$ en todo el espacio. Usando los resultados del problema 3:

   (a) Demuestre que los campos reflejado y transmitido tienen las siguientes amplitudes relativas a la amplitud del campo incidente E_i

   $$\frac{E_r}{E_i} \approx -\frac{(1-\gamma)\,(1-e^{-2\alpha})}{1-e^{-2\alpha}+2\gamma e^{-2\alpha}}, \qquad \frac{E_t}{E_i} \approx \frac{2\gamma e^{-\alpha}}{1-e^{-2\alpha}+2\gamma e^{-2\alpha}},$$

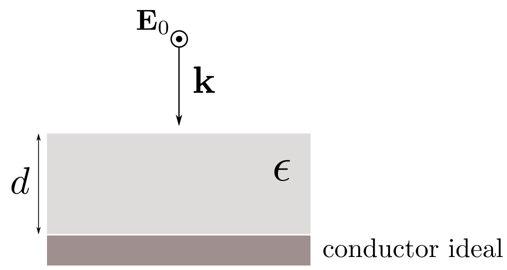
   donde $\gamma = (1-i)\delta\omega/c$ y $\alpha = (1-i)d/\delta$. Analice los casos $d = 0$ y $d \to \infty$.

   (b) Demuestre que siempre que el espesor de la lámina no sea muy pequeño, el coeficiente de transmisión $T = |E_t/E_i|^2$ de la lámina conductora es aproximadamente

   $$T = \frac{8(\delta\omega/c)^2\, e^{-2d/\delta}}{1+e^{-4d/\delta}-2e^{-2d/\delta}\cos(2d/\delta)}.$$

   Defina "espesor muy pequeño". Grafique $\log T$ en función de d/δ para $\delta\omega/c = 10^{-2}$.

5. Una onda plana linealmente polarizada incide en forma normal sobre un espejo formado por una lámina dieléctrica de espesor d depositada sobre un conductor ideal. El dieléctrico tiene $\mu = 1$ y permitividad ϵ. Plantee las condiciones de contorno y resuelva los campos en todo el espacio. Independientemente, verifique su solución usando los resultados del problema 3 a través de algún límite adecuado.



6. **Reflexión total externa.** Cuando rayos X inciden sobre la superficie de un metal con un ángulo mayor que un cierto ángulo crítico θ_0 sufren reflexión total. Calcular θ_0 como función de la frecuencia de los rayos X para el caso de polarización TE. Calcular la conductividad del metal aproximando a los electrones en su interior como libres, con una densidad $n \approx 8 \times 10^{22}$ cm^{-3}, y despreciando el efecto de los átomos, por ser éstos mucho más pesados. Usar como dato que la conductividad a bajas frecuencias es $\sigma_0 \approx 5 \times 10^{17}\,\mathrm{s}^{-1}$.

7. (a) Deducir la expresión para la longitud de atenuación de una onda electromagnética plana que se propaga en un medio conductor, en los casos límites de buen y mal conductor. Calcule la longitud de atenuación en cobre para una frecuencia de 60 Hz ($\sigma \approx 5 \times 10^{17}$ s^{-1}), y para ondas de radio de 100 kHz en agua de mar ($\sigma \approx 5 \times 10^{10}$ s^{-1}).

(b) Demostrar que para un buen conductor el coeficiente de reflexión es aproximadamente $r \approx 1 - 2\delta\omega/c$ donde δ es la longitud de atenuación.

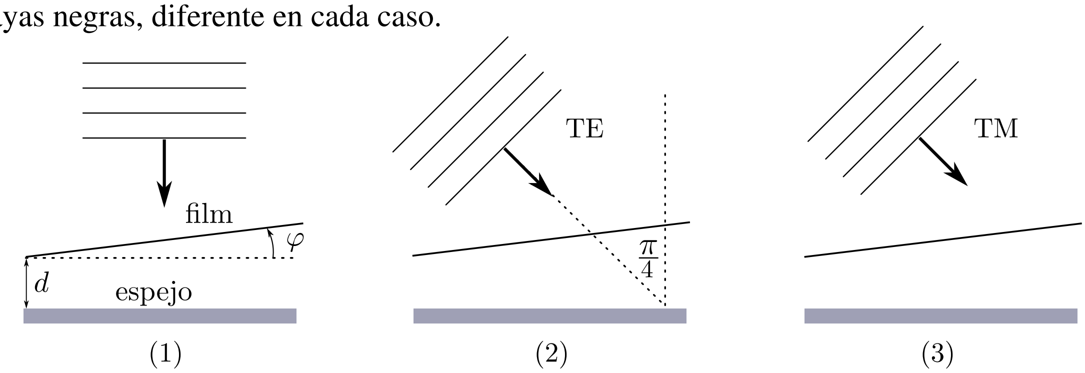
8. (a) Hallar la presión de radiación producida por una onda plana que incide normalmente desde el vacío sobre un conductor perfecto. Verificar que es igual a la densidad de energía de la onda.

   (b) Demostrar que la densidad de energía y la presión ejercida son también iguales en el caso en que la onda incide normalmente sobre una superficie totalmente absorbente.

   (c) ¿Qué radio debe tener una esfera hecha de un material con densidad 1 g cm^{-3}, que absorbe toda la luz que le llega, para que la presión de radiación de la luz solar compense la atracción gravitatoria del Sol? Aproximar la potencia de la radiación solar por $P = 4 \times 10^{26}$ W.

   (d) Extender el cálculo de la presión de radiación sobre un conductor perfecto para incidencia oblicua, estudiando los casos de polarización lineal (no necesariamente TE o TM), circular y elíptica.

9.* *Análisis de las experiencias de Wiener:* En 1890, Wiener realizó tres experiencias para demostrar la existencia de ondas electromagnéticas estacionarias y comprobar cuál de las magnitudes asociadas a las ondas causaba el proceso fotoquímico en las emulsiones fotográficas. Dichas experiencias consistieron en: (1) Hacer incidir normalmente sobre un espejo una onda plana con polarización lineal. (2) Hacer incidir una onda plana TE sobre un espejo con un ángulo de incidencia de $45°$. (3) Ídem que el anterior, pero TM. En cada caso Wiener interpuso una placa con una película fotográfica muy delgada (de espesor $\sim \lambda/20$) formando un ángulo φ con el plano del espejo, como muestra la figura. La distancia mínima entre la película y el espejo es d. Wiener encontró que al revelar la película aparecía un patrón de rayas negras, diferente en cada caso.



En las experiencias (1) y (2) aparecían franjas oscuras y claras alternadas en la película. En particular, si la película se colocaba sobre el espejo ($\varphi = 0, d = 0$), no registraba ninguna impresión. En la experiencia (3), no se observaban franjas en absoluto. Para cada uno de los casos (1), (2) y (3), calcular:

- $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en la región frente al espejo.
- El vector de Poynting y su valor medio temporal.
- La densidad de energía eléctrica y su valor medio temporal.
- La densidad de energía magnética y su valor medio temporal.

En función de estos resultados y de las observaciones experimentales antes señaladas, determinar cuál de las magnitudes calculadas puede ser la causante de la impresión sobre la película. Además, para cada experimento, predecir el espaciamiento entre dos franjas oscuras de la película, en función del ángulo φ, de la distancia d y de la longitud de onda.