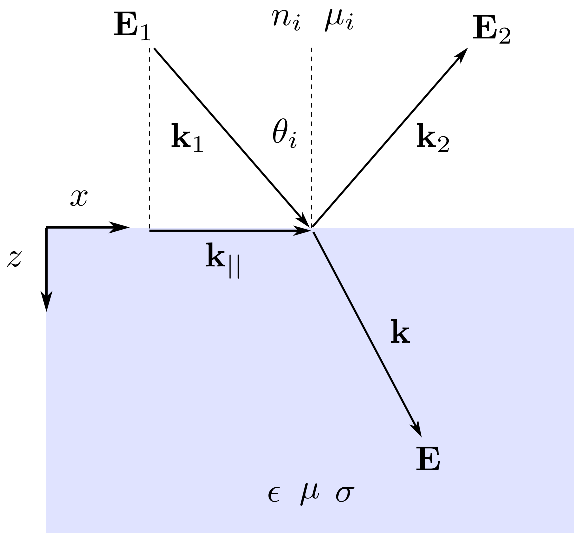
FÍSICA TEÓRICA 1 – 1er. de Cuatrimestre de 2016

Ondas planas: conservación de la energía en el problema de una interfase

El problema consiste en verificar la conservación de la energía en todo punto del espacio en la configuración típica de tres ondas planas en una interfase.



En verdad, no la conservación instante a instante, sino en valor medio,

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = - \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle \,. \tag{1}$$

En el caso considerado, la onda incidente y la reflejada se propagan en un medio no conductor ($\mathbf{j} = 0$), con índice de refracción real n_i y permeabilidad μ_i, y sus vectores de onda son también reales. La cuestión que hace el asunto más interesante es dejar librada la posibilidad de que la onda transmitida se propague en un medio conductor y tenga vector de onda complejo. El vector de onda puede ser complejo incluso en un medio no conductor si hay reflexión total interna. En clase se hizo con detalle la verificación de (1) en el primer medio, calculando con cuidado la interferencia de la onda incidente y la onda reflejada. Llegamos a demostrar que la ec. (1) era equivalente a decir que la componente z del promedio temporal del vector de Poynting no podía depender de la posición, y mostramos explícitamente que

$$\langle S_z(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle S_{1z} \rangle + \langle S_{2z} \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{n_i}{\mu_i} \left(|\mathbf{E}_1|^2 - |\mathbf{E}_2|^2 \right) \cos \theta_i,$$

donde $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$ son los vectores de Poynting calculados considerando cada onda por separado. Teniendo en cuenta la interferencia de las dos ondas, la primera igualdad no era nada obvia. Ahora veremos la manera de encarar la verificación de (1) en el medio donde se propaga la onda transmitida.

Cuando hay una única onda, el valor medio del vector de Poynting se calcula como

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re} \left\{ \left[\mathbf{E} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] \times \left[\mathbf{H} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right]^* \right\} . \tag{2}$$

La relación entre los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ es

$$\frac{c}{\mu \omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mathbf{H}. \tag{3}$$

Así resulta

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{c^2}{8\pi\mu\omega}\mathrm{Re}\left\{\left[\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*\right)\mathbf{k}^* - \left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{k}^*\right)\mathbf{E}^*\right]\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right)^*\right\}. \tag{4}$$

Si el vector $\mathbf{k}$ fuera real, $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n\,\hat{k}$, las dos últimas exponenciales se cancelarían, y por otro lado el producto escalar $\mathbf{E}\cdot\mathbf{k}^*$ sería igual a $\mathbf{E}\cdot\mathbf{k}$, que es cero, asumiendo que no hay exceso de carga libre. En otras palabras, un número de onda real, que significa que la onda es homogénea, implicaría

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{c}{8\pi}\frac{n}{\mu}\,\left|\mathbf{E}\right|^2\,\hat{k}, \tag{5}$$

y trivialmente se satisface $\nabla\cdot\langle\mathbf{S}\rangle = 0$. Pero como en general el vector $\mathbf{k}$ puede ser complejo, no hay que apurarse a cancelar las exponenciales ni a decir que $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$ implica que $\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{E} = 0$, lo que nos resultaría muy conveniente en la ec. (4). De manera que esta expresión no se puede simplificar en el caso general; como mucho queda

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{c^2}{8\pi\omega\mu}\left|e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right|^2\,\left\{\left|\mathbf{E}\right|^2\mathrm{Re}\left[\mathbf{k}^*\right] - \mathrm{Re}\left[\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{k}^*\right)\mathbf{E}^*\right]\right\}. \tag{6}$$

El problema de tres ondas en una interfase requería que los tres vectores número de onda tuvieran la misma proyección sobre el plano de la interfase. Ese par de componentes en común, al que en clase llamamos $\mathbf{k}_{||}$, queda determinado a partir del vector de onda de la onda incidente, definido como

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_{||} + k_{1\perp}\,\hat{z}. \tag{7}$$

Puesto que estamos asumiendo que $\mathbf{k}_1$ es real, entonces $\mathbf{k}_{||}$ también es real. Hechas estas observaciones, el vector de onda de la onda transmitida debe ser

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{||} + \kappa\,\hat{z}, \tag{8}$$

donde κ es en general un número complejo,

$$\kappa = \kappa' + i\kappa'', \tag{9}$$

con κ' y κ'' reales. Lo importante es que en el plano xy las componentes de $\mathbf{k}$ son reales. Escribiendo $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + z\,\hat{z}$, es

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{k}_{||}\cdot\boldsymbol{\rho} + \kappa z, \tag{10}$$

y resulta

$$\left|e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right|^2 = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right)^* = \exp[i\mathbf{k}_{||}\cdot\boldsymbol{\rho}]\,e^{i\kappa' z-\kappa'' z}\,\exp[-i\mathbf{k}_{||}\cdot\boldsymbol{\rho}]\,e^{-i\kappa' z-\kappa'' z} = e^{-2\kappa'' z}. \tag{11}$$

Reemplazando el resultado anterior en la ec. (6), se obtiene

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{c^2}{8\pi\omega\mu}e^{-2\kappa'' z}\,\left\{\left|\mathbf{E}\right|^2\mathrm{Re}\left[\mathbf{k}^*\right] - \mathrm{Re}\left[\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{k}^*\right)\mathbf{E}^*\right]\right\}. \tag{12}$$

La primera verificación importante es que esto implica que el promedio temporal del vector de Poynting no depende de las coordenadas x e y. Este resultado tenía que ser cierto, debido a que, para el mismo valor de z, nada distingue a un punto de otro. El promedio del vector de Poynting debe ser el mismo en todos los puntos a una determinada altura sobre la interfase. A diferencia del medio donde se propagan la onda incidente y la reflejada, donde obteníamos un vector de Poynting constante, en el medio donde se propaga la onda transmitida el vector de Poynting puede depender de la coordenada z. Es natural que así ocurra, porque un vector de onda complejo implica una atenuación en la intensidad de la onda a medida que nos alejamos de la interfase.

Ahora bien, como $\langle \mathbf{S} \rangle$ sólo depende de z, su divergencia sólo involucra a su componente en esa dirección. Es decir, no necesitamos todo el vector $\langle \mathbf{S} \rangle$, sino sólo su componente z, que es

$$\langle S_z(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{c^2}{8\pi\omega\mu} e^{-2\kappa'' z} \left\{ |\mathbf{E}|^2 \, \mathrm{Re}\left[\hat{z} \cdot \mathbf{k}^*\right] - \mathrm{Re}\left[(\mathbf{E} \cdot \mathbf{k}^*) \, (\hat{z} \cdot \mathbf{E}^*) \right] \right\}. \tag{13}$$

Por otro lado tenemos que

$$\hat{z} \cdot \mathbf{k}^* = \kappa^* = \kappa' - i\kappa'', \qquad \mathbf{E} \cdot \mathbf{k}^* = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} - 2i\kappa'' \, \hat{z}) = -2i\kappa'' \mathbf{E} \cdot \hat{z}. \tag{14}$$

Luego,

$$\langle S_z(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{c^2}{8\pi\omega\mu} e^{-2\kappa'' z} \left\{ |\mathbf{E}|^2 \, \kappa' - \mathrm{Re}\left[-2i\kappa'' (\hat{z} \cdot \mathbf{E}) \, (\hat{z} \cdot \mathbf{E}^*) \right] \right\}$$

$$= \frac{c^2}{8\pi\omega\mu} e^{-2\kappa'' z} \, |\mathbf{E}|^2 \, \kappa'. \tag{15}$$

Finalmente,

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = -\frac{c^2}{4\pi\omega\mu} e^{-2\kappa'' z} \, |\mathbf{E}|^2 \, \kappa'' \kappa'. \tag{16}$$

Esto es sólo la mitad de la ecuación (1). Ahora es necesario calcular la otra mitad: el promedio de la potencia disipada. Asumiendo que vale la ley de Ohm es

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left[\sigma \mathbf{E} e^{i\mathbf{k} \cdot r} \cdot \left(\mathbf{E} e^{i\mathbf{k} \cdot r} \right)^* \right] = \frac{\mathrm{Re}[\sigma]}{2} \, |\mathbf{E}|^2 \left| e^{i\mathbf{k} \cdot r} \right|^2$$

$$= \frac{\mathrm{Re}[\sigma]}{2} \, |\mathbf{E}|^2 \, e^{-2\kappa'' z}. \tag{17}$$

Noten que σ no es necesariamente una cantidad real. Basta ver, por ejemplo, el resultado del modelo de Drude, donde

$$\sigma = \frac{q^2 N/m}{\gamma - i\omega}.$$

Independientemente de que se aplique o no el modelo de Drude, la pregunta que falta responder es si es cierto o no que

$$-\frac{c^2}{4\pi\omega\mu} e^{-2\kappa'' z} \, |\mathbf{E}|^2 \, \kappa'' \kappa' = -\frac{\mathrm{Re}[\sigma]}{2} \, |\mathbf{E}|^2 \, e^{-2\kappa'' z} \qquad (?) \tag{18}$$

Para eso necesitamos decir algo acerca de $\kappa = \kappa' + i\kappa''$. Esa información se obtiene a partir de la relación de dispersión,

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon\mu \left[1 + \frac{i4\pi\sigma}{\epsilon\omega}\right]. \tag{19}$$

Recuerden que $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{||} + \kappa\,\hat{z}$. Completen ahora ustedes la demostración de la igualdad (18).

Modestas proposiciones:

- Verificar que se cumple la ec. (1) cuando el segundo medio no es conductor ($\mathbf{j} = 0$) pero hay reflexión total.
- Hasta aquí sólo hablamos de la conservación de la energía en el interior de cada medio. Si σ es finita, la ec. (1) implica la continuidad de la componente normal de $\langle \mathbf{S} \rangle$ a través de la interfase. Verifiquen que eso es cierto. Pueden considerar por separado incidencia normal, los casos TM y TE, los casos en que el segundo medio es conductor o hay reflexión total interna, y finalmente ver qué pasa cuando tienen una superposición de modos TE y TM. Empiecen por lo más sencillo. Noten que para relacionar lo que ocurre a un lado y al otro de la interfase van a necesitar los coeficientes de reflexión y transmisión.