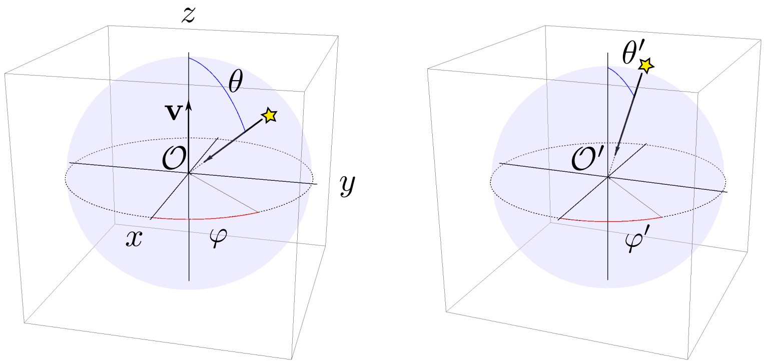
FÍSICA TEÓRICA 1 – 1er. Cuatrimestre 2016

Guía 7: Relatividad especial

1. (El cielo relativista.) El observador $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad relativa $\mathbf{v}$ respecto de $\mathcal{O}$. En cierto instante, los dos observadores coinciden en el mismo punto del espacio. En ese momento, los dos reciben luz proveniente de una misma estrella muy lejana. Ambos observadores eligen su eje z en la dirección de $\mathbf{v}$, de modo que escribirán el vector de la velocidad de la luz recibida según expresiones análogas; el observador $\mathcal{O}$, por ejemplo, escribirá $\mathbf{c}_{\mathcal{O}} = -(c\cos\varphi\sin\theta\,\hat{x} + c\sin\varphi\sin\theta\,\hat{y} + c\cos\theta\,\hat{x})$. Obviamente, $|\mathbf{c}_{\mathcal{O}}| = |\mathbf{c}_{\mathcal{O}'}| = c$.



(a) Si $\mathcal{O}$ recibe la luz según la dirección definida por los ángulos θ y φ, aplicando las fórmulas de transformación de velocidades, muestre que, según $\mathcal{O}'$, la luz proviene de la dirección definida por los ángulos

$$\varphi' = \varphi, \qquad \cos\theta' = \frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\cos\theta}. \qquad (\beta = v/c)$$

(b) Deduzca estas mismas expresiones a partir de la transformación del cuadrivector número de onda.

(c) Una fórmula importante, que puede deducir de lo anterior, relaciona las tangentes de los ángulos θ y θ'. Sabiendo que $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos x)$ y $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)$, deduzca la *fórmula de aberración relativista*:

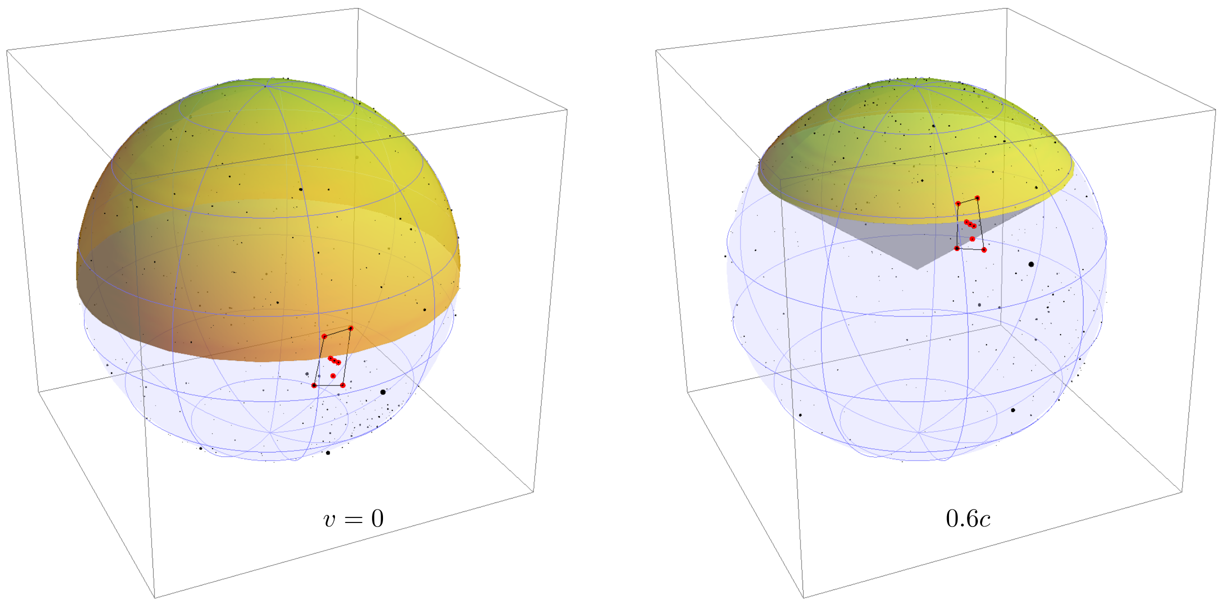
$$\tan\frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\tan\frac{\theta}{2}.$$

(d) Aplique la fórmula anterior para valores particulares del ángulo θ. Por ejemplo, $\theta = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi$. En especial, muestre que todas las estrellas en el hemisferio $0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi$ de $\mathcal{O}$ estarán concentradas, según $\mathcal{O}'$, en cierto cono alrededor del eje z. ¿Qué pasa cuando β se acerca a 1?

(e) El observador $\mathcal{O}$ ve una pequeña constelación triangular, cuyas 3 estrellas están en las direcciones (θ, φ), $(\theta + \delta\theta_1, \varphi + \delta\varphi_1)$ y $(\theta + \delta\theta_2, \varphi + \delta\varphi_2)$. Halle las posiciones de las mismas estrellas según $\mathcal{O}'$ a primer orden en los δ's. ¿Qué relación geométrica guardan entre sí los triángulos que definen la constelación, según sea vista por uno u otro observador? ¿Pasará lo mismo con figuras más complicadas, como las Pléyades, o más extensas, como Orión?

(f) A partir de los resultados anteriores, discuta cualitativamente cuál sería el aspecto de la bóveda celeste para un observador que pasara cerca de la Tierra moviéndose a una velocidad relativista.

(g) Para hacer en la computadora. El archivo adjunto* contiene las orientaciones de las 1000 estrellas más brillantes vistas desde la Tierra. Con esas estrellas, construya el mapa celeste para un observador relativista. Repita el experimento para valores crecientes de v. ¿Se comprueban o desmienten sus primeras intuiciones?

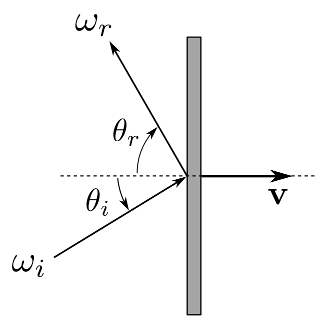


Un ejemplo de lo que debe obtenerse para el cielo del observador $\mathcal{O}'$ en las vecindades de la Tierra: $\mathcal{O}'$ se mueve en dirección a la estrella polar, con la velocidad indicada en cada caso. La sección sombreada abarca las estrellas del hemisferio superior del cielo de un observador en la Tierra. Se ha trazado el contorno de la constelación de Orión.

2. Sobre un espejo plano que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ paralela a su normal incide luz de frecuencia ω_i con un ángulo de incidencia θ_i, como muestra la figura.

    (a) Encuentre la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Analice el caso $v \ll c$ y compare con el rebote de partículas no relativistas contra una pared en movimiento.

    (b) Encuentre la frecuencia de la onda reflejada. Para incidencia normal analice qué pasa cuando $v \ll c$ y compare con lo que cabría esperar si, en lugar de luz, hubiera un flujo partículas o de sonido contra una pared en movimiento.



* http://materias.df.uba.ar/ft1a2015c2/files/2015/11/catalogo_de_estrellas.rar. El formato es $(\varphi, \theta, \text{magnitud})$.

3. Un sistema inercial S' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto de un sistema S. Puede asumirse que los ejes de los dos sistemas coinciden en $t' = t = 0$.

   (a) Si en S se miden los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, encuentre los campos $\mathbf{E}'(t', \mathbf{r}')$ y $\mathbf{B}'(t', \mathbf{r}')$ en S'.

   (b) Si en S se propaga una onda plana caracterizada por los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ y $\mathbf{B} = \hat{k} \times \mathbf{E}$, demuestre que en S' también se propaga una onda plana y encuéntrela explícitamente.

   (c) Si en S se miden los campos estáticos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, encuentre los campos en S' en los siguientes casos: 1) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$; 2) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{v}$; 3) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \parallel \mathbf{v}$; 4) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$. Proponga ejemplos para cada situación.

4. En un sistema S, en cierto instante de tiempo y cierto punto del espacio se miden campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Demostrar que:

   (a) Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares, lo mismo sucede en cualquier otro sistema inercial.

   (b) La relación de orden entre $|\mathbf{E}|$ y $|\mathbf{B}|$ es la misma en todos los sistemas.

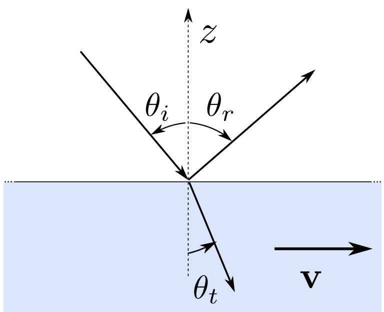
   (c) Si $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces puede encontrarse un sistema en el cual, asociado al mismo evento, o bien sólo hay campo eléctrico o bien solamente campo magnético. ¿Es único?

5. En un sistema de referencia inercial S, el campo eléctrico forma un ángulo θ con el campo magnético. Ambos campos son uniformes y estáticos.

   (a) Encontrar un sistema de referencia S' tal que los campos sean paralelos.

   (b) Si en S los módulos de los campos cumplen $B_0 = 2E_0$, calcular los campos en el sistema de referencia hallado en (a). Tomar el límite para $\theta \ll 1$ y para $\theta \to \pi/2$. Verificar el comportamiento de los invariantes.

6. (Fresnel relativista.) En el sistema de laboratorio, una onda plana, de frecuencia ω y amplitud $\mathbf{E}$, incide desde el vacío sobre la superficie de un líquido de índice de refracción n y $\mu = 1$. El líquido ocupa el semiespacio $z < 0$ y se mueve con velocidad v paralela a su superficie. En el laboratorio, la polarización de la onda puede ser TE o TM. Encuentre la dirección, la amplitud, la polarización y la frecuencia de las ondas transmitidas y reflejadas en el sistema de laboratorio. ¿Es posible definir en el laboratorio un ángulo análogo al ángulo de Brewster?



7. Un cilindro circular macizo y de longitud infinita tiene densidad de carga y de corriente uniformes. La corriente es paralela al eje del cilindro. Encontrar un sistema de referencia en el cual sólo hay campo magnético o eléctrico. ¿Es único?

8. (a) Un cilindro infinito de sección circular está cargado uniformemente en volumen. Calcular los campos en un sistema de referencia que se mueve paralelo al cilindro. Primero, a partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema, y luego por transformación directa de los campos.

   (b) Ahora hay dos barras como la anterior, dispuestas una paralela a la otra. Demostrar que la fuerza por unidad de longitud sobre cualquiera de las barras, medida en un sistema de referencia S' que se mueve paralelo a ellas, es la misma que en el sistema S en el que las barras están en reposo. Demostrarlo primero a partir de la fuerza de Lorentz y de los campos en S', y luego demostrando que el objeto $f^\mu \equiv \frac{1}{c} f^\mu_{\ \nu} j^\nu$ es el cuadrivector que es la generalización covariante de la densidad de fuerza. Como "yapa" del segundo método, obtener la ley de transformación relativista para la potencia disipada por efecto Joule.

9. Un dipolo magnético puntual $\mathbf{m}$ se encuentra en reposo en el origen de un sistema S', por lo tanto los potenciales en este sistema están dados por $\Phi' = 0$ y $\mathbf{A}' = \mathbf{m} \times \mathbf{r}'/r'^3$. El sistema S' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema de laboratorio S.

   (a) Demostrar que en S los potenciales a primer orden en β son

$$\Phi = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{R}}{c\, R^3}, \qquad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

   con $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, donde $\mathbf{r}_0(t)$ es la posición del origen de S' medida en S.

   (b) A partir de estos potenciales, calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en S y mostrar que el campo eléctrico se puede escribir de las siguientes maneras alternativas

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/c) - \mathbf{m} \times \frac{[3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v}]}{cR^3}, \\
\mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/2c) + \frac{3}{2}\mathbf{n} \times \frac{[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{m} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})\mathbf{v}]}{cR^3},
\end{aligned}$$

   donde $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ y $\mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{p})$ es el campo eléctrico de un dipolo efectivo de valor $\mathbf{p}$.

   (c) Encontrar los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en S, a primer orden en β, transformando directamente los campos $\mathbf{E}' = 0$ y $\mathbf{B}'$ del sistema S'. Comparar con las expresiones anteriores.

10. Dos partículas cargadas se mueven con velocidad constante en direcciones ortogonales. Calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre la otra en el instante en que una de las partículas cruza la dirección de movimiento de la otra. Verificar que las fuerzas no son iguales y opuestas. Por lo tanto, no se conserva el impulso lineal de las partículas ¿Hay en ello alguna contradicción?

11. Encontrar la trayectoria de una partícula cargada en cada caso:

   (a) Movimiento en un campo eléctrico uniforme y estático, dirigido según el eje x. La condición inicial es $p_x = p_z = 0$ y $p_y = p_0$. Demostrar que en el límite no relativista se obtiene el resultado conocido de mecánica clásica, es decir, una parábola.

   (b) Movimiento en un campo magnético estático y uniforme.

   (c) Movimiento en campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ cruzados, perpendiculares entre sí, uniformes y estáticos. Considerar los tres casos posibles: (a) $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$, (b) $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$ y (c) $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.