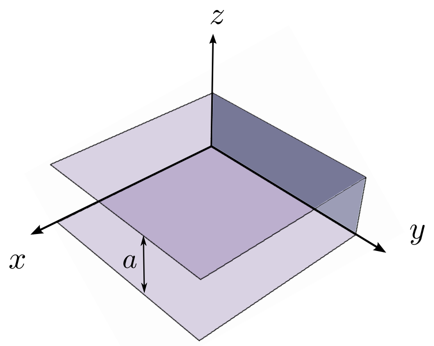
FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. cuatrimestre de 2016
Recuperatorio del primer parcial (29/11)

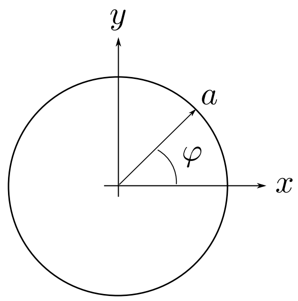
1. (4000 unidades Scoville) Encontrar la función de Green de Dirichlet del recinto mostrado en la figura.

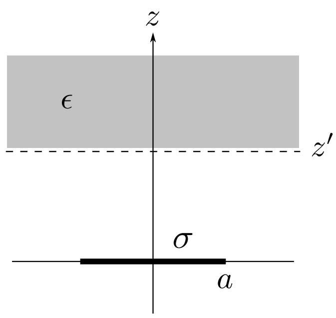


$$0 \le x < \infty, \quad -\infty < y < \infty,$$
$$0 \le z \le a$$

2. (6000 unidades Scoville) Encontrar el potencial electrostático en todo el espacio para un disco de radio a, centrado en el origen sobre el plano xy y cargado con densidad de carga como muestra la figura, donde σ_0 es una constante. El semiespacio $z > z' > 0$ está ocupado por un dieléctrico de permitividad ϵ. [*Ayuda*: notar que σ es proporcional a $\cos\varphi$. ¿Cuál es la forma genérica del potencial producido por una densidad superficial proporcional a $\cos\varphi$ ubicada en el plano $z = z_0$?]

$$\sigma(\rho,\varphi) = \sigma_0 \, \frac{\rho}{a} \, \cos\varphi$$





3. (6000 unidades Scoville) La región $a \le r \le b$ está ocupada por un medio con magnetización
$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M_0 \left(\cos\theta\,\hat{r} + \alpha \sin\theta\,\hat{\theta}\right).$$
   (a) Encontrar $\mathbf{B}$ en $r < a$ y $r > b$ (no se pide calcularlo en la región intermedia). El resultado puede quedar escrito en términos del rotor o del gradiente de un potencial. No es necesario calcular explícitamente $\mathbf{B}$. [*Ayuda*: atención a las fuentes en volumen y en superficie.]
   (b) ¿Qué relación deben cumplir los parámetros del problema para que el campo $\mathbf{B}$ se anule en $r > b$? En ese caso, ¿cuánto vale $\mathbf{B}$ para $r < a$? Esta vez sí se pide calcular $\mathbf{B}$ explícitamente.

4. (4000 unidades Scoville) **Cuentas $\rightarrow \mathbf{1^+}$.** Encontrar la fuerza entre una esfera de radio a, cargada uniformemente en volumen con carga total Q, y una esfera **conductora descargada** de radio b. La separación entre los centros de las dos esferas es $c\,\hat{n}$, donde $c > a + b$ y $\hat{n}$ es el versor dirigido desde el centro de la esfera cargada hasta el centro de la esfera conductora.

Problemas en hojas separadas. Se aprueba con un mínimo de 12000 unidades Scoville.

Algunas relaciones de ortogonalidad:

$$\int_0^a dx\ \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,\sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right)=\frac{a}{2}\delta_{n,n'},\qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{ix(k-k')}=2\pi\delta(k-k'),$$

$$\int_0^\infty dx\ \sin kx\ \sin k'x=\frac{\pi}{2}\delta(k-k')\qquad (k,k'>0),$$

$$\int_0^{2\pi} dx\ \cos\nu x\,\cos\nu' x=(1+\delta_{\nu,0})\,\pi\,\delta_{\nu,\nu'},\qquad \int_0^{2\pi} dx\ \sin\nu x\,\sin\nu' x=\pi\,\delta_{\nu,\nu'}\qquad (\nu\neq 0),$$

$$\int_0^\infty d\rho\ \rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho)=\frac{\delta(k-k')}{k}\qquad (k,k'\geq 0),\qquad \int_{-1}^{1} dx\ P_l(x)P_{l'}(x)=\frac{2}{2l+1}\,\delta_{l,l'}.$$

Una función de Green: $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}\,Y_{lm}(\theta,\varphi)\,Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\,\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}$.

Medios magnéticos: $\mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M}$.

Una fórmula suelta: $Y_{l0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,P_l(\cos\theta)$.

Operadores diferenciales en coordenadas esféricas:

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\,\hat{\varphi},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta F_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta F_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]\,\hat{r}+\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}\right]\,\hat{\theta}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\,\hat{\varphi}.$$

Una integral: $\int dx\ x^2J_1(x)=x^2J_2(x)$.

Y ya que nos sobra hoja...

Un breve relato de terror:

Euler was stopped by a mass of 75 *simultaneous but inconsistent equations for eight unknown orbital parameters.*

E. T. Jaynes, *Probability*.