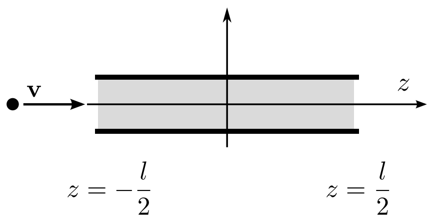
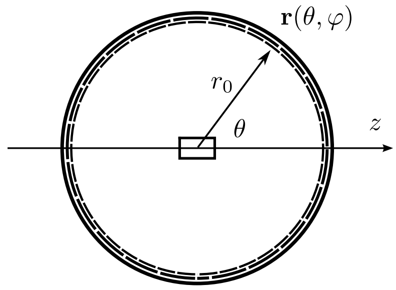
FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. cuatrimestre de 2016
Recuperatorio del segundo parcial (7/12)

1. (6 pts.) Una partícula relativista de carga q pasa a través de una región de longitud l, entre $z = -l/2$ y $z = l/2$, dentro de la cual experimenta una aceleración constante $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}\,\hat{z}$. Antes de acelerarse, la partícula se mueve sobre el eje z con velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{z}$, con $v > 0$. La partícula se acelera a partir de $t = 0$. El tiempo Δt durante el que se acelera es lo suficientemente corto como para despreciar cualquier efecto sobre la velocidad de la partícula, de modo que su trayectoria es $\mathbf{r}(t) = (vt - l/2)\,\hat{z}$. Un calorímetro esférico de radio $r_0 \gg l$ está centrado en el origen.



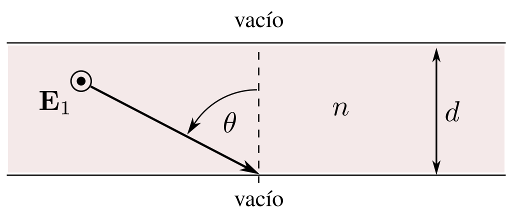


   (a) Calcular la potencia por unidad de ángulo sólido en función del tiempo medida en un punto cualquiera del calorímetro, $\mathbf{r}(\theta,\varphi) = r_0\,\hat{r}(\theta,\varphi)$.

   (b) ¿Cuánto mide el intervalo de tiempo durante el que se recibe radiación en cada punto $\mathbf{r}(\theta,\varphi)$?

   (c) Integrando la contribución de cada elemento de ángulo sólido, calcular la energía total absorbida por el calorímetro. Comparar (o más bien, chequear el resultado) usando la fórmula de Larmor relativista para calcular la energía total emitida por la partícula.

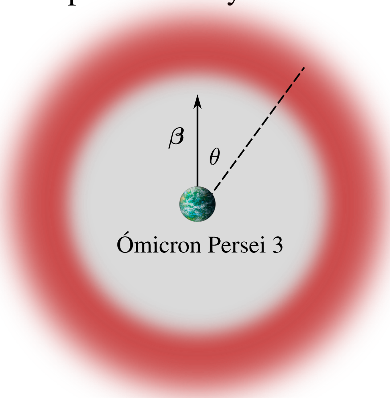
2. (6 pts.) Un modelo simplificado de una fibra óptica consiste en una lámina dieléctrica de espesor d, índice de refracción $n > 1$ y $\mu = 1$. Por encima y debajo de la lámina hay vacío. Lo que se pretende en una fibra óptica es propagar luz dentro de la fibra. Suponga entonces como dato que hay una onda plana TE de amplitud E_1 y frecuencia ω propagándose dentro de la lámina, con un ángulo θ mayor al ángulo crítico, como muestra la figura. Defina $\chi = \sqrt{(n\sin\theta)^2 - 1}$ y $\alpha = n\omega\cos\theta\; d/c$.



   (a) Teniendo en cuenta que las regiones por encima y por debajo de la lámina dieléctrica son no acotadas, ¿cuántas ondas es necesario asumir que se propagan en cada una de esas dos regiones? ¿Cuántas ondas se propagan dentro de la lámina?

   (b) Considerando que en cada interfase hay dos condiciones de contorno, encuentre la relación que deben cumplir ω, n, θ y d para que el problema tenga solución. *Ayuda:* Si tiene, como el pobre Euler, más ecuaciones que incógnitas, despeje una de las incógnitas a partir de varias ecuaciones y compare.

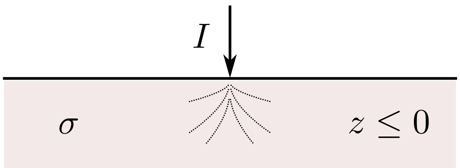
3. (5 pts.) El planeta Ómicron Persei 3 (y con él todo su sistema solar y varios sistemas vecinos) está inmerso en una nube de polvo interestelar de varios años luz de diámetro. La nube emite radiación infrarroja de frecuencia ω_n muy bien definida en su sistema propio. Esa frecuencia es invisible al ojo humano. Debido a un no tan extraño caso de convergencia evolutiva, los habitantes de Ómicron Persei 3 tienen apariencia humana, hablan español latino y adoran al dios verdadero, al que representan como una esfera aureolada.



(a) Suponiendo que Ómicron Persei 3 se mueve con velocidad relativa $\boldsymbol{\beta} = \beta\,\hat{z}$ respecto a la nube interestelar, con $\beta > 0$, ¿cuál es la frecuencia $\omega(\theta)$ de la radiación que el planeta recibe de la nube en función del ángulo θ, todo medido en el sistema en reposo de Ómicron Persei 3?

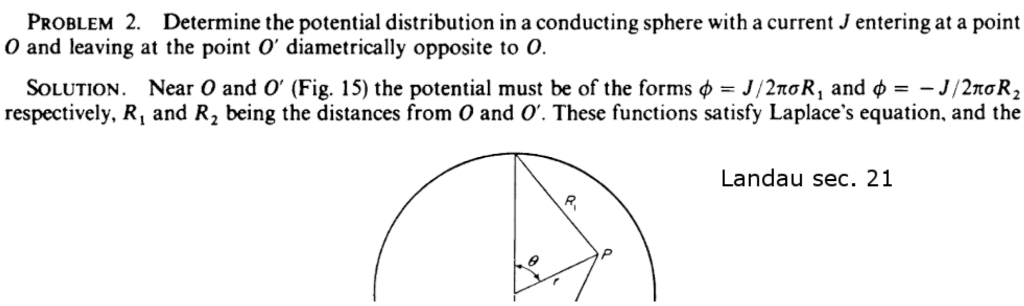
(b) Asumiendo que las frecuencias visibles están entre ω_1 y ω_2, donde $\omega_n < \omega_1 < \omega_2$, describir cualitativamente el aspecto del cielo de Omicrón Persei 3, en lo que respecta a la radiación de la nube, en función de β.

4. (3 pts.) Un medio de conductividad σ ocupa el semiespacio $z \leq 0$. Una corriente I ingresa a través del origen desde un cable que está sobre el eje z.



(a) Calcular la densidad de corriente en el **semiespacio** $z \leq 0$.

(b) Tal vez el camino más sencillo para resolver el punto anterior consista en aplicar separación de variables en la región $z \leq 0$. En tal caso, el resultado quedará escrito como una transformada integral. Haciendo la integral explícitamente (no recomendado), o por simple prueba y error (recomendado), encuentre a que sencilla función es igual esa integral. *Ayuda*:


PROBLEM 2. Determine the potential distribution in a conducting sphere with a current J entering at a point O and leaving at the point O' diametrically opposite to O.

SOLUTION. Near O and O' (Fig. 15) the potential must be of the forms $\phi = J/2\pi\sigma R_1$ and $\phi = -J/2\pi\sigma R_2$ respectively, R_1 and R_2 being the distances from O and O'. These functions satisfy Laplace's equation, and the

- Los campos de una carga en movimiento arbitrario $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = q\left[\frac{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{R^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}}{c\,R\,(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\right]_{t'}, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = [\mathbf{n}]_{t'}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t),$$

  donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$, y $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$

- La potencia por unidad de ángulo sólido en un punto $\mathbf{r}$ a tiempo t radiada por una carga en movimiento arbitrario:

$$I(\mathbf{r},t) = \mathbf{S}(\mathbf{r},t)\cdot[R^2\mathbf{n}]_{t'}, \qquad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$

- La fórmula a Larmor relativista: $P_{\text{emi}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{q^2}{c}\,\gamma^6\left[\dot{\beta}^2 - |\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2\right].$

- Una relación de ortogonalidad: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dk\; e^{i(x-x')k} = 2\pi\delta(x-x').$

- Algunas integrales admirables:

$$\int_{-1}^{1} dx\,\frac{x}{(1-\beta x)^4} = \frac{8\beta\gamma^6}{3}, \qquad \int_{-1}^{1} dx\,\frac{1-x^2}{(1-\beta x)^4} = \frac{4\gamma^4}{3},$$

$$\int_{-1}^{1} dx\,\frac{1}{(1-\beta x)^3} = 2\gamma^4, \qquad \int_{-1}^{1} dx\,\frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5} = \frac{4\gamma^6}{3}.$$

Problemas en hojas separadas. Se aprueba con un mínimo de 12 puntos.