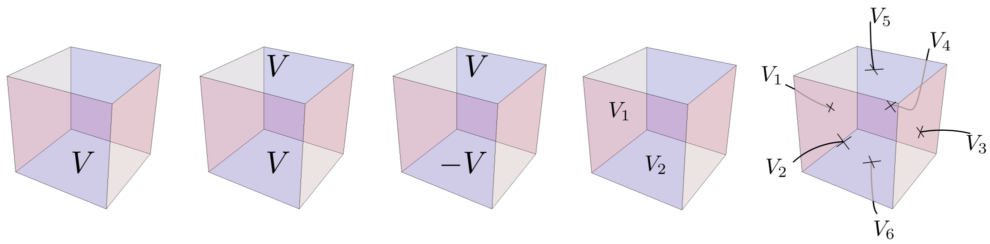
FÍSICA TEÓRICA 1 - 2do. Cuatrimestre de 2016

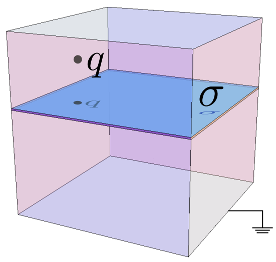
Guía 2: Separación de variables, función de Green y método de imágenes

1. Un cubo de lado a tiene sus tapas al potencial que muestra cada figura. Las tapas donde no se indica ningún valor del potencial están a tierra. Encontrar el potencial en el **interior** del cubo en cada caso.



2. Los planos $z = 0$ y $z = a$ están a potenciales $V_1(x, y)$ y $V_2(x, y)$. Hallar el potencial en todo el espacio.

3. Un cubo de lado a está conectado a tierra. En su interior hay un cuadrado con densidad superficial uniforme σ y una carga puntual q. Calcule el potencial **en todo el espacio**.



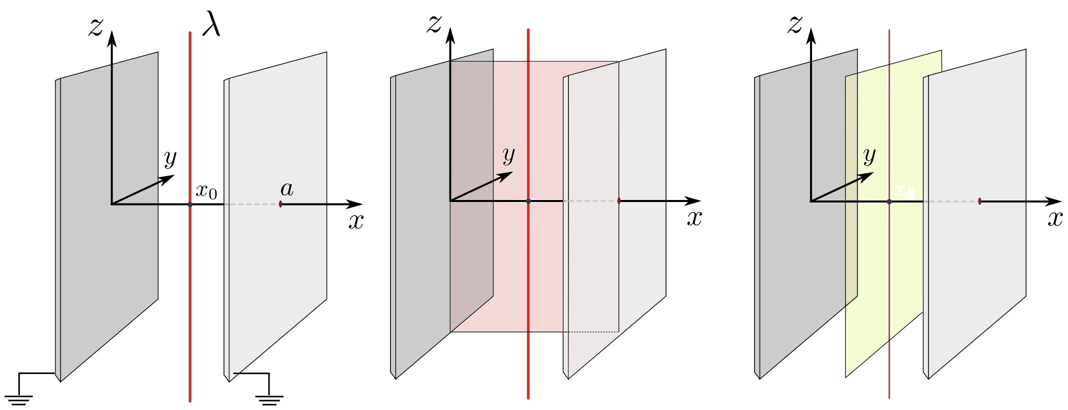
4. Un alambre con densidad de carga constante λ está equidistante a dos placas conductoras infinitas conectadas a tierra, como muestra la figura ($x_0 = a/2$). Utilizando separación de variables, encuentre el potencial **en todo el espacio**. Para ello divida la región entre las placas de los siguientes modos:

   (a) Con un corte vertical perpendicular a los planos.

   (b) Con un corte vertical paralelo a los planos.

   (c)* Compare las dos formas de la solución. ¿Se atreverá a demostrar la igualdad de las dos expresiones sin usar el teorema de unicidad?

   (d)* Tanto la integral como la suma de Fourier que han aparecido al aplicar las dos separaciones pueden hacerse de manera explícita y la solución es una función simple. Encuentre esa función.



5. Calcular el potencial y el campo electrostático en todo punto del espacio producido por un cuadrado cargado con densidad uniforme σ. Puede asumirse que el cuadrado está sobre el plano xy, que su centro coincide con el origen y que sus lados están alineados con los ejes x e y.

6. (a) Encuentre por separación en cartesianas la función de Green de Dirichlet del espacio no acotado. Para eso, divida el espacio en dos en regiones con un plano paralelo al plano xy; la solución debe quedar escrita en la forma

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \; e^{i[k_x(x-x')+k_y(y-y')]} \; \phi(k_x,k_y) \; f_{k_x k_y}(z-z').$$

   (b) Encuentre la función de Green de Dirichlet del espacio no acotado proponiendo para G un desarrollo de Fourier tridimensional,

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \int d^3\mathbf{p} \; e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \; \phi(\mathbf{p}),$$

   y resolviendo directamente la ecuación de Poisson, $\nabla^2_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$.

   (c)* Comparando las dos formas de la función de Green del espacio no acotado obtenidas en los ítems anteriores, encuentre la transformada de Fourier de la función $f(z) = e^{-\kappa|z|}/\kappa$.

7. Encuentre la función de Green para el problema de Dirichlet en el interior de un cilindro semiinfinito de sección cuadrada de lado a (es decir, $0 \leq x, y \leq a$, $0 \leq z < \infty$).

8. Ídem al anterior pero para un cilindro cuadrado infinito (ahora $-\infty < z < \infty$).

9. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial V_1 y la inferior a V_2. Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.

10. (a) Encontrar el potencial de una carga puntual q entre dos cáscaras esféricas conductoras, concéntricas y conectadas a tierra, de radios a y b respectivamente.

    (b) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre cada esfera.

    (c) Observar qué sucede cuando se hace tender el radio de la esfera exterior a infinito ¿Cuánto valen las cargas totales inducidas en ese caso?

    (d) Resolver el problema en el caso en que los potenciales de las esferas se elevan a V_1 y V_2.

    (e) Resolver el problema en el caso en que las esferas están aisladas y tienen una carga total Q_1 y Q_2.

11. (a) Una esfera de radio a está conectada a tierra. A una distancia de su centro $d > a$, hay un dipolo puntual $\mathbf{p}$. Calcular el potencial en todo el espacio usando el método de la función de Green.

    (b) Ídem (a) pero mediante el método de imágenes. Verificar que ambos resultados coinciden.

    (c) Calcular la densidad de carga inducida sobre la esfera y la carga total.

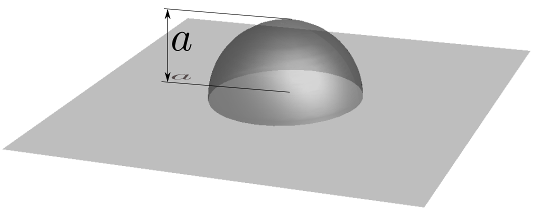
    (d) Escribir el potencial para $r \gg a$ conservando términos de hasta orden $(a/r)^3$. Interprete en términos de la carga total y del momento dipolar total de las cargas fuentes e imágenes.

(e) Encuentre ahora el potencial en el caso en que la esfera está aislada y descargada.

12. Mediante el método de imágenes, hallar la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región entre dos esferas concéntricas de radios a y b. Muestre que esta solución coincide con la del problema 10. *Sugerencia*: es necesario usar una serie infinita de imágenes. Hallar primero relaciones de recurrencia para las ubicaciones y los módulos de las cargas imágenes; resolver esas relaciones y luego escribir la superposición adecuada en forma de suma infinita. Para comparar con el resultado del problema 10, usar el desarrollo de la función $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ en armónicos esféricos y hacer la suma explícitamente.

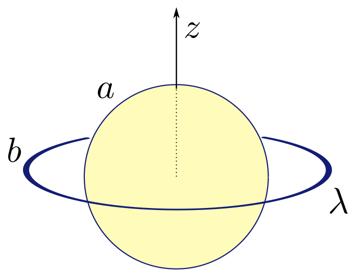
13.* Bastante más complicado que el anterior: los centros de dos esferas conductoras de radio a están a una distancia $2a$ uno del otro, de modo que las esferas se tocan en un sólo punto. Las esferas están aisladas, y cada una tiene carga q. Encontrar el potencial en todo el espacio. *Sugerencia*: empiece suponiendo que cada esfera se reemplaza por una carga puntual de valor Q ubicada en su centro. Obtenga las relaciones de recurrencia para las sucesivas cargas imágenes y sus posiciones. Como en el problema anterior, estas relaciones estarán acopladas. Busque eliminar las posiciones para obtener relaciones de recurrencia que sólo involucren los valores de las cargas. Esas relaciones serán fáciles de resolver. Finalmente, calcule la suma de las cargas imágenes dentro de cada esfera y ajuste el valor de Q para que esa carga sea igual a q. (Relacionado con esto, ver Smythe, § 6.081. *Difference Equations. Two Spheres*, y el último párrafo de la sección 6.9 del curso de Feynman, vol. 2.)

14. Un contorno mixto consiste en un plano infinito y una semiesfera de radio a, como muestra la figura.



Calcular la función de Green de Dirichlet en la región por encima del contorno. Identificar cada contribución.

15. Una esfera de radio a está a tierra. Concéntrico con ella hay un anillo de radio $b > a$, cargado uniformemente con carga total Q.



(a) Calcular el potencial en todo punto del espacio usando el método de la función de Green.

(b) Calcular el potencial sobre el eje perpendicular al plano del anillo, utilizando el método de imágenes. Luego, extender la solución para todos los puntos exteriores a la esfera mediante prolongación analítica (Jackson, sección 3.3, donde dice "Series (3.33), with its coefficients determined by the boundary..."). Comparar con el resultado del punto (a).

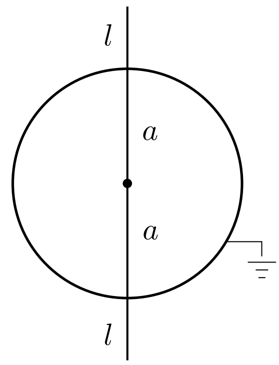
(c) Calcular el potencial usando separación de variables y comparar con los resultados anteriores.

(d) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre la esfera. ¿Qué tiene esto que ver con el método de imágenes?

(e) ¿Cómo resolvería el problema si la esfera estuviera aislada y descargada?

Fórmulas útiles: $P_{2n+1}(0) = 0$, $P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{2^n n!}$, $P_0(x) = 1$.

16. Una esfera de radio a está a tierra. Por el centro de la esfera pasa una línea de longitud $d = 2(a + l)$ uniformemente cargada, como muestra la figura. Encontrar el potencial en todo el espacio.



17. Un cilindro de radio a y altura h tiene su superficie lateral conectada a tierra, mientras que las tapas se mantienen a potenciales V y $-V$. Hallar el potencial en el interior del cilindro.

18. (a) Usando separación de variables en coordenadas cilíndricas, hallar el potencial y el campo electrostático producidos por un disco de radio a cargado con densidad uniforme σ.

    (b) A través de límites adecuados, verificar que la expresión obtenida se reduce en un caso a la de una carga puntual, y en otro a la de un plano infinito.

    (c) ¿El disco puede ser conductor? Se sorteará un auto entre las mejores respuestas.

19. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de un cilindro circular de radio a y longitud L, separando en regiones de las siguientes maneras:

    (a) Cortando con un plano perpendicular al eje del cilindro.

    (b) Cortando con un cilindro coaxial al cilindro original.

20. Ídem al problema anterior pero para un cilindro de longitud infinita. Encuentre también la función de Green para el problema externo utilizando el segundo tipo de corte. ¿Sabría cómo resolver el problema externo usando el primer tipo de corte?

21. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de una estructura con forma de cuarto de cilindro circular, infinito y de radio a, siguiendo estos dos caminos:

    (a) Usando separación de variables en el cuarto de cilindro a partir de la ecuación para $\nabla\Phi^2$ en coordenadas cilíndricas y con condiciones de contorno adecuadas.

    (b) Usando imágenes y la función de Green para el cilindro infinito obtenida en el problema anterior.

(c) Además del problema del cuarto de cilindro, que corresponde a un ángulo de $\alpha = \pi/2$ entre las tapas planas laterales, ¿para qué otros valores α puede resolverse el problema usando imágenes?

22. (a) Usando separación en coordenadas cilíndricas, calcular la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región interna entre dos planos infinitos, ubicados en $z = 0$ y $z = L$.

(b) Si se coloca una carga q a una altura z entre los planos, calcular las densidades de carga y las cargas totales inducidas sobre cada plano.

(c)* Observe que si bien la densidad superficial no tiene una expresión muy simple, el resultado para la carga total es llamativamente simple. La carga total sobre cada plano puede obtenerse de consideraciones más generales que no requieren calcular el potencial explícitamente. Lo que se usa es el llamado Teorema de Reciprocidad. Entre los problemas del capítulo 1 del Jackson figura este teorema y su aplicación al caso de los dos planos. En la tercera edición son los problemas 1.12 y 1.13. Quedan propuestos como problemas opcionales.

(d)* Encuentre la función de Green mediante el método de imágenes. Para comparar esta suma infinita con el resultado del ítem (a), en cada término de la suma use alguno de los desarrollos de la función $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ en términos de funciones de Bessel y haga la suma explícitamente.