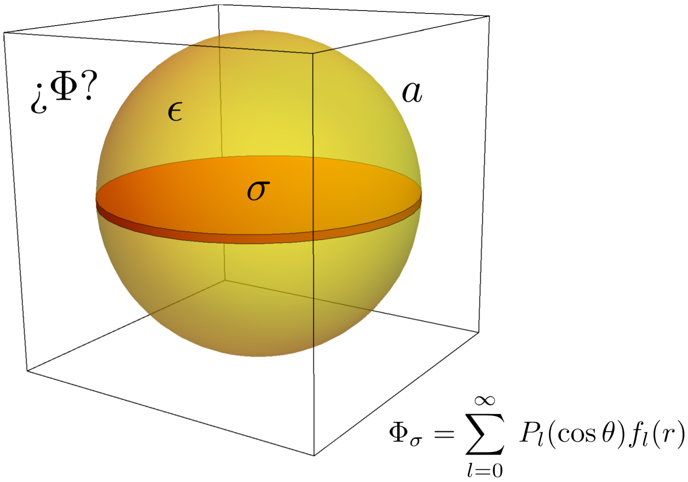
Primero, un repaso de lo dicho el miércoles para el problema de la figura:



El potencial va a ser la suma de dos contribuciones: una asociada al disco apantallado y otra a las cargas inducidas sobre la esfera:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon}\Phi_\sigma + \Phi_a, \tag{1}$$

donde Φ_σ es el potencial de un disco de radio a con densidad uniforme σ. El factor $1/\epsilon$ tiene en cuenta el apantallamiento. Antes de ponernos a resolver el potencial del disco conviene plantear cuál va a ser la estrategia para resolver el problema. Entonces, supongamos que

$$\Phi_\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\, f_l(r), \tag{2}$$

donde las $f_l(r)$ salen de resolver el potencial del disco. En la región $r > a$ esas funciones tienen que ser proporcionales a $r^{-(l+1)}$, porque ahí vale Laplace; pero en la región $r < a$ pueden ser cualquier cosa. También sabemos que las f_l son continuas a través de $r = a$ y que su derivada también es continua. Eso es porque el potencial Φ_σ está generado por cargas que no están en la esfera, sino en el disco; no tiene ningún salto en $r = a$.

Por otro lado, el potencial de las cargas inducidas sobre la superficie de la esfera tiene la forma genérica que ya hemos usado muchas veces:

$$\Phi_a = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\, A_l \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\right)_a. \tag{3}$$

La condición que define los A_l es la continuidad de $\mathbf{D}$ a través de la esfera:

$$-\epsilon\partial_r\Phi\Big|_{a^-} = -\partial_r\Phi\Big|_{a^+}. \tag{4}$$

Así, el término $l-$ésimo de esta ecuación se lee como

$$\epsilon\left[\frac{1}{\epsilon}f_l'(a) + \frac{lA_l}{a^2}\right] = \frac{1}{\epsilon}f_l'(a) - \frac{(l+1)A_l}{a^2}, \tag{5}$$

lo que implica

$$A_l = \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \frac{f_l'(a) a^2}{\epsilon l + l + 1}. \tag{6}$$

Aquí termina el problema propiamente dicho, con algunos chequeos: si $\epsilon = 1$ y si $\epsilon \to \infty$, resultan los límites esperados, pero con el siguiente cuidado: el término $l = 0$ no se anula al tomar $\epsilon \to \infty$. Ese término está relacionado con que el momento monopolar debe ser igual a la carga del disco. Si se anulara, todo el potencial de esa carga desaparecería, lo que no puede ocurrir porque el dieléctrico es neutro. La carga neta siempre es $\pi a^2 \sigma$.

Para el potencial del disco obtuvimos

$$\Phi_\sigma = 2\pi\sigma r \left\{ \sum_{l \text{ pares}} \frac{(2l+1) P_l(0)}{(l+2)(l-1)} P_l(\cos\theta) \right\} - 2\pi\sigma a^2 \sum_{l \text{ pares}} \frac{P_l(0)}{l-1} P_l(\cos\theta) \frac{r^l}{a^{l+1}}, \qquad \text{si } r \leq a; \tag{7}$$

$$\Phi_\sigma = 2\pi\sigma a^2 \sum_{l \text{ pares}} \frac{P_l(0)}{l+2} P_l(\cos\theta) \frac{a^l}{r^{l+1}}, \qquad \text{si } r \geq a. \tag{8}$$

Con lo dicho antes acerca de la continuidad de las funciones f_l a través de $r = a$, volviendo al problema completo, para calcular los f_l' es más práctico usar la forma de Φ_σ para $r \geq a$, con lo que resulta

$$f_l'(a) = -2\pi\sigma \frac{l+1}{l+2}. \tag{9}$$

Se ve que tiene la unidades correctas, porque A_l debe tener unidades de carga y en la ec. (6) se ve que A_l es proporcional a $f_l' a^2$.

▪ Finalmente, el desafío lanzado por Emilio: ¿a qué conocida función es igual el término entre llaves en la ecuación (7)?

$$F(\cos\theta) = \sum_{l \text{ pares}} \frac{(2l+1) P_l(0)}{(l+2)(l-1)} P_l(\cos\theta). \tag{10}$$

La pista: ¿a qué debe ser igual el potencial del disco cuando $a \to \infty$? Cuando tengan la respuesta (que no requiere ningún cálculo), verifíquenla explícitamente calculando los coeficientes F_l del desarrollo de F en los polinomios de Legendre.