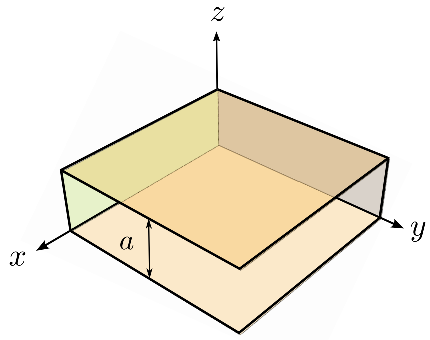
FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. cuatrimestre de 2016
Primer Parcial (12/10)

1. (5 pts) Encontrar la función de Green de Dirichlet del recinto mostrado en la figura.

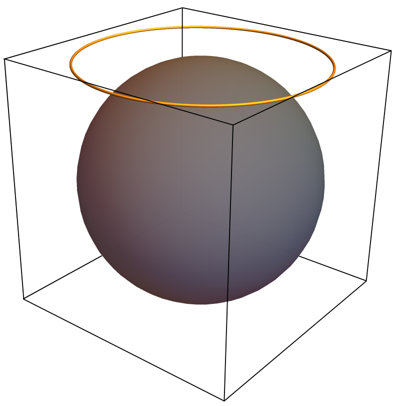


$$0 \le x, y < \infty,\ 0 \le z \le a$$

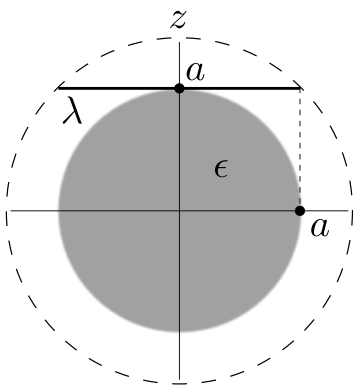
2. (6 pts) **San Esferito**. Una esfera dieléctrica tiene radio a y permitividad ϵ. A una altura $z = a$ hay un anillo de radio a cargado uniformemente con densidad lineal λ, como muestra la figura.

   (a) Encontrar el campo eléctrico en todo el espacio. El resultado puede quedar escrito en términos de un potencial. No se pide calcular explícitamente el gradiente.

   (b) Encontrar la carga y el momento dipolar inducidos en la esfera dieléctrica.



La caja cúbica es sólo a los fines de la perspectiva.



3. (6 pts) **Imán raro de Emilio.** Un imán ocupa la región $0 \le z \le d$ y su densidad de magnetización es

$$\mathbf{M}(\rho, \varphi, z) = \alpha J_1(q\rho)\,\hat{\rho}(\varphi) + \beta J_0(q\rho)\,\hat{z} \qquad (\text{con } q > 0).$$

   (a) Encontrar $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en el **exterior** del imán. El resultado puede quedar escrito en términos del rotor o del gradiente de un potencial. No es necesario calcular explícitamente $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$.

   (b) ¿Qué relación deben cumplir los parámetros del problema para que el campo $\mathbf{B}$ se anule por debajo del imán?

4. (3 pts) **Cuentas → $\mathbf{0^+}$.** Encontrar la fuerza entre una esfera de radio a, cargada uniformemente en volumen con carga total Q, y un cilindro infinito de radio b, cargado uniformemente en volumen de tal manera que su carga por unidad de longitud es λ. La distancia d entre el centro de la esfera y el eje del cilindro es mayor que la suma de sus radios.

Algunas relaciones de ortogonalidad:

$$\int_0^a dx\ \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\ \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) = \frac{a}{2}\delta_{n,n'},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{ix(k-k')} = 2\pi\delta(k-k'),$$

$$\int_0^{\infty} dx\ \sin kx\ \sin k'x = \frac{\pi}{2}\delta(k-k') \qquad (k,k'>0),$$

$$\int_0^{\infty} d\rho\ \rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho) = \frac{\delta(k-k')}{k} \qquad (k,k'\geq 0),$$

$$\int_{-1}^{1} dx\ P_l(x)P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{l,l'}.$$

Función de Green del espacio no acotado:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \int_0^{\infty} dk\left[J_0(k\rho')J_0(k\rho) + 2\ \cos(\varphi-\varphi')\ J_1(k\rho')J_1(k\rho) + \ \text{otras cosas}\ \right]e^{-k|z-z'|}.$$

Medios magnéticos: $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$.

Operadores diferenciales en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\ \hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\ \hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \hat{z}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho F_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\ \hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)\ \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho F_\varphi}{\partial\rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi}\right)\ \hat{z}.$$

Dos derivadas: $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[xJ_1(x)\right] = xJ_0(x), \quad J_0' = -J_1.$

Problemas en hojas separadas. Se aprueba con un mínimo de 12 puntos.