

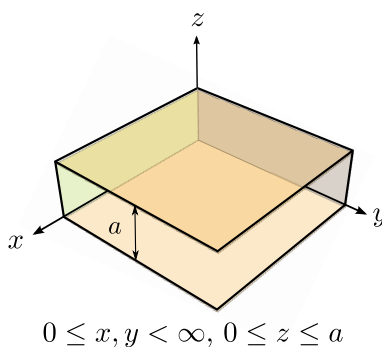
# FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. cuatrimestre de 2016

## Primer Parcial – resuelto y comentado

Problema 1	1
Problema 2	4
Problema 3	8
Problema 4	11
Estadísticas	14
Fórmulas incluidas en la hoja del parcial	15

### Problema 1

(5 pts) Encontrar la función de Green de Dirichlet del recinto mostrado en la figura.



■ **Primer tipo de corte:** si la carga está en  $(x', y', z')$  una posibilidad es un corte con el plano  $z = z'$ . En las direcciones  $x$  e  $y$  hay base de funciones  $\sin k_x x \sin k_y y$ , con  $k_x, k_y > 0$ . El potencial de una carga puntual  $q$  en la posición  $\mathbf{r}'$  se escribe como

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \sin k_x x \sin k_y y A(k_x, k_y) f(z), \quad (1)$$

donde la función de  $z$  es la combinación de exponenciales reales que para  $z < z'$  se anula en  $z = 0$  y para  $z > z'$  se anula  $z = a$ ,

$$f(z) = \sinh [k(a - z_>)] \sinh(kz_<), \quad (2)$$

donde  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . La función de  $z$  es continua pero su derivada tiene un salto en  $z = z'$ , dado por

$$f'(z'^-) - f'(z'^+) = k \left\{ \sinh [k(a - z')] \cosh(kz') + \cosh [k(a - z')] \sinh(kz') \right\} = k \sinh(ka). \quad (3)$$

Por otro lado, la densidad de carga en el plano  $z = z'$  se escribe como

$$\sigma(x', y') = q\delta(x - x')\delta(y - y') = \frac{4q}{\pi^2} \int_0^\infty dk_x \sin k_x x \sin k_x x' \int_0^\infty dk_y \sin k_y y \sin k_y y'. \quad (4)$$

La condición de salto en  $z = z'$  es

$$\int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \sin k_x x \sin k_y y A(k_x, k_y) k \sinh(ka) = \frac{16q}{\pi} \int_0^\infty dk_x \sin k_x x \sin k_x x' \int_0^\infty dk_y \sin k_y y \sin k_y y'. \quad (5)$$

De aquí resulta

$$A(k_x, k_y) = \frac{16q \sin k_x x' \sin k_y y'}{\pi k \sinh(ka)}. \quad (6)$$

Finalmente,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{16}{\pi} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \sin k_x x \sin k_x x' \sin k_y y \sin k_y y' \frac{\sinh[k(a - z_>)] \sinh(kz_<)}{k \sinh(ka)}. \quad (7)$$

■ **Segundo tipo de corte:** dividiendo en dos regiones con el plano  $x = x'$  el potencial debe tener la forma

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty dk_y \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \sin k_y y A_n(k_y) g(x), \quad (8)$$

donde la función de  $x$ , combinación de exponenciales reales, que se anula en  $x = 0$  para  $x < x'$ , que no diverge cuando  $x \rightarrow \infty$  y que es continua en  $x = x'$  es

$$g(x) = \sinh(kx_<) e^{-kx_>}, \quad (9)$$

donde ahora es  $k = \sqrt{k_y^2 + (n\pi/a)^2}$ . El salto de  $g'$  al atravesar  $x'$  es

$$g'(x'^-) - g'(x'^+) = k \left[ \cosh(kx') e^{-kx'} + \sinh(kx') e^{-kx'} \right] = k. \quad (10)$$

La densidad de carga, por otro lado, es

$$\sigma(y, z) = q\delta(y - y')\delta(z - z') = q \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk_y \sin k_y y \sin k_y y' \right] \left[ \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{a}\right) \right]. \quad (11)$$

Luego, la condición de salto implica

$$A_n(k_y) = \frac{16q}{ak} \sin k_y y' \sin\left(\frac{n\pi z'}{a}\right). \quad (12)$$

Finalmente,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{16}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty dk_y \sin k_y y \sin k_y y' \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{a}\right) \frac{\sinh(kx_<) e^{-kx_>}}{k}. \quad (13)$$

El corte con un plano por  $y = y'$  es equivalente.

■ **Por imágenes:** a partir de la función de Green de la región entre dos planos infinitos,  $0 \leq z \leq a$ . Esta función de Green se calcula fácilmente con un corte por  $z = z'$ . El potencial debe tener la forma

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^2k \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}) A(\mathbf{k}) f(z), \quad (14)$$

donde  $\boldsymbol{\rho} = x \hat{x} + y \hat{y}$ ,  $\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$  y donde  $f(z)$  es la función definida antes

$$f(z) = \sinh[k(a - z_>)] \sinh(kz_<), \quad (15)$$

con  $k = |\mathbf{k}|$ . La densidad de carga es ahora

$$\sigma(x, y) = q\delta(x - x')\delta(y - y') = \frac{q}{(2\pi)^2} \int d^2k \exp[i\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')]. \quad (16)$$

Después de plantear la condición de salto se obtiene

$$A(\mathbf{k}) = \frac{q \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}')}{\pi k \sinh(ka)}. \quad (17)$$

Luego, la función de Green para el espacio entre dos planos infinitos es

$$G_{||}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\pi} \int d^2k \exp[i\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')] \frac{\sinh[k(a - z_>)] \sinh(kz_<)}{k \sinh(ka)}. \quad (18)$$

Para construir la función de Green del problema original hay que usar tres cargas imágenes: dos cargas  $-q$  en los puntos  $(x', -y', z')$  y  $(-x', y', z')$ , y una carga  $q$  en  $(-x', -y', z')$ . Cada contribución sólo difiere en los factores exponenciales  $\exp[i\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')]$ . Después de hacer la suma de los cuatro factores y de usar la simetría del integrando, se reobtiene el resultado (7). Puede verificarse el resultado análogo para el segundo tipo de corte.

■ **En cilíndricas** (aporte del camarada Montero): en coordenadas cilíndricas, el recinto comprende el sector entre  $\varphi = 0$  y  $\varphi = \pi/2$ . La solución puede construirse usando la base de funciones

$$\sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\pi/2}\right) = \sin 2n\varphi, \quad (19)$$

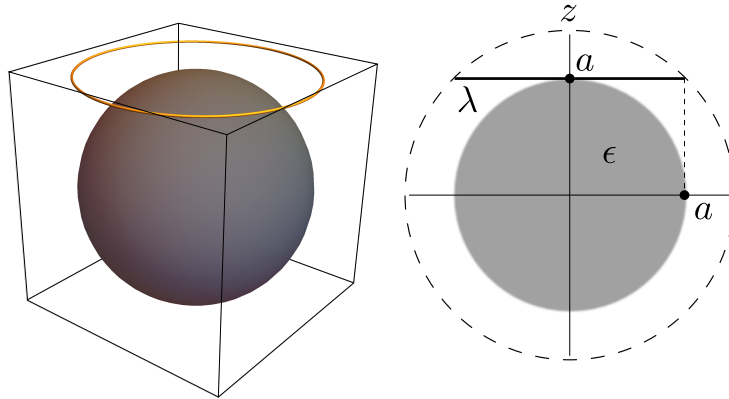
que se anulan en ambos extremos del intervalo angular. Las funciones de Bessel asociadas serán las que tengan índice  $\nu = 2n$ . La división en regiones puede hacerse de dos maneras distintas, según sea  $\rho$  mayor o menor que  $\rho'$  o según sea  $z$  mayor o menor que  $z'$ . Esto se deja como ejercicio.

■ En Este problema fue donde menos dificultades tuvieron. El 80% lo aprobó con una nota de 4 puntos o más, sobre los 5 puntos que valía el ejercicio. No tenemos mayores comentarios que hacer.

## Problema 2

(6 pts) **San Esferito.** Una esfera dieléctrica tiene radio  $a$  y permitividad  $\epsilon$ . A una altura  $z = a$  hay un anillo de radio  $a$  cargado uniformemente con densidad lineal  $\lambda$ , como muestra la figura.

1. Encontrar el campo eléctrico en todo el espacio. El resultado puede quedar escrito en términos de un potencial. No se pide calcular explícitamente el gradiente.
2. Encontrar la carga y el momento dipolar inducidos en la esfera dieléctrica.



La caja cúbica es sólo a los fines de la perspectiva.

■ El campo eléctrico es el gradiente de un potencial,  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ , que a su vez es la suma de dos contribuciones bien diferentes: el potencial debido al anillo de carga,  $\phi_0$ , por un lado, y el potencial de las cargas inducidas en la esfera dieléctrica,  $\phi_\epsilon$ , por otro lado. El anillo está contenido en una esfera de radio  $b = \sqrt{2}a$ . Las cargas de polarización se inducen exclusivamente en la superficie de la esfera, de modo que su potencial es el de una cáscara esférica de radio  $a$ . Teniendo en cuenta estas cosas y la simetría azimutal del problema, podemos escribir

$$\phi = \phi_0 + \phi_\epsilon = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) A_l \left( \frac{r^l}{r^{l+1}} \right)_b + \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) B_l \left( \frac{r^l}{r^{l+1}} \right)_a. \quad (20)$$

Asumiendo por el momento que conocemos los coeficientes  $A_l$  del potencial del anillo, la condición de salto de  $\mathbf{D}$  normal en la superficie de la esfera dieléctrica,

$$\epsilon \frac{\partial\phi}{\partial r} \Big|_{a^-} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \Big|_{a^+} = 0, \quad (21)$$

término a término implica

$$\epsilon \left( l \frac{a^{l-1}}{b^{l+1}} A_l + l \frac{B_l}{a^2} \right) = \left( l \frac{a^{l-1}}{b^{l+1}} A_l - (l+1) \frac{B_l}{a^2} \right). \quad (22)$$

De aquí resulta

$$B_l = -\frac{l(\epsilon-1)}{l\epsilon+l+1} \left( \frac{a}{b} \right)^{l+1} A_l. \quad (23)$$

Los  $A_l$  se obtienen de manera independiente. Hay que plantear la condición de salto para la distribución superficial de carga asociada al anillo, considerada como una distribución sobre la esfera de radio  $b = \sqrt{2}a$ ,

$$\sigma(\cos \theta) = \frac{\lambda}{2a} \delta(\cos \theta - \cos \frac{\pi}{4}). \quad (24)$$

Escrita como un desarrollo en los polinomios de Legendre,  $\sigma = \sum \sigma_l P_l$ , resulta

$$\begin{aligned} \sigma_l &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \sigma(\cos \theta) P_l(\cos \theta), \\ \rightarrow \sigma(\cos \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda}{2a} \frac{2l+1}{2} P_l\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (25)$$

La condición de salto es

$$\left. \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right|_{b^-} - \left. \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right|_{b^+} = 4\pi\sigma, \quad (26)$$

y término a término resulta

$$(2l+1) \frac{A_l}{b^2} = 4\pi \frac{\lambda}{2a} \frac{2l+1}{2} P_l\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (27)$$

por lo tanto

$$A_l = 2\pi a \lambda P_l\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = Q P_l\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (28)$$

donde  $Q = 2\pi a \lambda$  es la carga del anillo. Notar que esto permite verificar si estaba bien la constante numérica usada para escribir  $\sigma(\cos \theta)$ , pues  $A_0 = Q$ , como debe ser.

Respecto al ítem (b), los primeros términos del potencial debido a la polarización de la esfera dieléctrica son, para  $r > a$ ,

$$\phi_\epsilon(\mathbf{r}) = \frac{B_0}{r} + \frac{aB_1 \cos \theta}{r^2} + \dots \quad (29)$$

donde

$$B_0 = 0, \quad B_1 = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} Q P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (30)$$

Recordar que  $P_1(x) = x$ . De aquí se lee que la carga inducida es  $Q_\epsilon = 0$ , lo que está de acuerdo con la neutralidad del dieléctrico, y que el momento dipolar inducido es

$$\mathbf{p}_\epsilon = aB_1 \hat{z} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} aQ. \quad (31)$$

Algunas verificaciones posibles: la trivial, que  $\epsilon = 1$  implica  $B_l = 0$ ; la moderadamente trivial, que  $\epsilon \rightarrow \infty$  lleva a los mismos resultados que si la esfera dieléctrica fuera una esfera conductora a cierto potencial. En este último caso también es fácil verificar que el momento dipolar inducido es igual al del anillo imagen.

■ El error más común en este problema fue escribir mal la densidad de carga superficial asociada al anillo sobre la esfera de radio  $b = \sqrt{2}a$ . El caso menos grave consistía en equivocarse en un factor numérico sin dimensiones. Más grave fue escribir una densidad superficial que no tuviera las unidades correctas, y no detectar el error en ninguna de las fases posteriores del problema. La mayoría escribió bien que  $\sigma$  iba a ser proporcional a  $\lambda\delta(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{4})$  o  $\lambda\delta(\theta - \frac{\pi}{4})$ . Puesto que  $\lambda$  no dependía de  $\varphi$ , la constante de normalización podía hallarse pidiendo que la densidad superficial integrada sobre la esfera de radio  $b$  fuera igual a la carga del anillo,  $Q = 2\pi\lambda a$ . Es decir, escribiendo

$$\sigma(\cos\theta) = C\lambda\delta\left(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{4}\right), \quad (32)$$

y planteando luego que  $\int d\Omega b^2\sigma(\cos\theta) = Q$ , lo que implica

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) b^2 C \lambda \delta\left(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi C b^2 \lambda = Q$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{2\pi\lambda b^2} = \frac{1}{2a}. \quad (33)$$

Fue común que integraran con un elemento de superficie proporcional a  $a^2$  en lugar de  $b^2$ , o que usaran que el radio del anillo era  $b$ . En todo caso, eso afectaba el resultado en un factor numérico. El hecho de que en algunos parciales nos encontráramos como densidades que no tuvieran las unidades correctas nos hace pensar que varios alumnos aplicaron, sin reflexionar mucho, reglas tales como “tengo que dividir por el jacobiano”. Que yo recuerde, este fue el curso en donde más insistimos en el modo en que debía verificarse que las densidades superficiales usadas al separar en regiones fueran lo que tenían que ser. No fue suficiente, pero es más una enseñanza para nosotros que para ustedes. Al margen de esto, el error podía detectarse fácilmente verificando que el término monopolar del potencial del anillo fuera  $Q/r$ , siempre que no calcularan mal  $Q$ .

También hubo un número notable de alumnos que usaron una función de Green con simetría azimutal,

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta') \frac{r^l}{r'^{l+1}}, \quad (!) \quad (34)$$

pero sin precisar en qué sentido la expresión que proponían era una función de Green. Algunos fueron más lejos, y escribieron que, por ser el problema axisimétrico, era

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta') \frac{r^l}{r'^{l+1}}, \quad (35)$$

lo que no tiene mayor sentido. Consultados el resto de los ayudantes, nos fue imposible averiguar como se difundió esta idea entre los alumnos. Dicho sea de paso, no es la primera vez que aparece una cosa así en los parciales. Pero no se trata, después de todo, de algo descabellado. Hay un hecho cierto, y es que para un problema con simetría azimutal la función de Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  puede reemplazarse a todos los efectos por  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Cuando decimos esto, lo que queremos significar es que da lo mismo escribir la integral de Green usando cualquiera de las dos funciones, no que las dos funciones sean iguales cuando hay simetría azimutal. Para ver por qué  $G$  y  $g$  son equivalentes, en el sentido antes dicho, basta ver el caso más sencillo, cuando las condiciones de contorno son homogéneas. Dada una  $\rho(\mathbf{r})$  que no depende de  $\varphi$ , en tal caso la integral de Green es

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \int d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(r', \theta') \\ &= \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \int_{-1}^1 d(\cos \theta') \int r'^2 dr' \frac{r'^l}{r^{l+1}} \rho(r', \theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' Y_{lm}^*(\theta', \varphi').\end{aligned}\quad (36)$$

La última integral da

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') = 2\pi \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta').\quad (37)$$

Volviendo a la ec. (36), la delta de Kronecker permite reemplazar

$$\delta_{m0} Y_{lm}(\theta, \varphi) \rightarrow \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta).\quad (38)$$

Luego de cancelar varios factores, resulta

$$\phi(\mathbf{r}) = 2\pi \sum_l P_l(\cos \theta) \int_{-1}^1 d(\cos \theta') \int r'^2 dr' \frac{r'^l}{r^{l+1}} \rho(r', \theta') P_l(\cos \theta').\quad (39)$$

Para que quede una integral en volumen, el factor  $2\pi$  puede reemplazarse por  $\int_0^{2\pi} d\varphi'$ . Finalmente,

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3 r' \left[ \sum_l P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') \frac{r'^l}{r^{l+1}} \right] \rho(\mathbf{r}') = \int d^3 r' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'),\quad (40)$$

demostrando que, a los efectos prácticos, para un problema con simetría azimutal, da lo mismo usar  $G$  que  $g$ . (Falta aún demostrarlo cuando hay condiciones de contorno no homogéneas; queda como ejercicio).

La comparación de la expresión para  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  con el resultado que obtuvimos para el potencial del anillo,

$$\phi_0(\mathbf{r}) = Q \sum_l P_l(\cos \theta) P_l\left(\cos \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{r'^l}{r^{l+1}}\right)_{r'},\quad (41)$$

permite inferir que  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  es el potencial de un anillo de carga unidad, de radio  $a = r' \sin \theta'$ , contenido en un plano paralelo al plano  $xy$ , a una altura  $z' = r' \cos \theta'$ . Es como si en lugar de cargas puntuales, todas nuestras

fuentes fueran anillos con simetría azimutal, lo que no es muy difícil de visualizar: cualquier  $\rho$  con simetría azimutal puede pensarse como compuesta por una superposición de tales anillos. Algo análogo sucede en otras geometrías. Por ejemplo, en cartesianas: si las fuentes tienen simetría de traslación en  $z$ , el problema es efectivamente bidimensional y puede plantearse usando una función de Green bidimensional, análoga a  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , cuyas fuentes son hilos infinitos, uniformemente cargados, en la dirección  $z$ .

### Problema 3

(6 pts) **Imán raro de Emilio.** Un imán ocupa la región  $0 \leq z \leq d$  y su densidad de magnetización es

$$\mathbf{M}(\rho, \varphi, z) = \alpha J_1(q\rho) \hat{\rho}(\varphi) + \beta J_0(q\rho) \hat{z} \quad (\text{con } q > 0). \quad (42)$$

1. Encontrar  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en el **exterior** del imán. El resultado puede quedar escrito en términos del rotor o del gradiente de un potencial. No es necesario calcular explícitamente  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ .
2. ¿Qué relación deben cumplir los parámetros del problema para que el campo  $\mathbf{B}$  se anule por debajo del imán?

■ Puesto que la magnetización es conocida en todo el espacio y además no hay corrientes libres, resulta práctico escribir un problema electrostático equivalente para el campo  $\mathbf{H} = -\nabla\Phi$ . Dentro del imán  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ , y fuera  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ . Las cargas se dividen en dos clases: las de superficie, en los planos  $z = 0$  y  $z = d$ ; y las de volumen, en el interior del imán:

$$\sigma_0 = -\hat{z} \cdot \mathbf{M} \Big|_{z=0}; \quad \sigma_d = \hat{z} \cdot \mathbf{M} \Big|_{z=d}; \quad \rho_{\mathbf{M}} = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad 0 < z < d. \quad (43)$$

Explícitamente,

$$\sigma_0(\rho) = -\beta J_0(q\rho); \quad \sigma_d(\rho) = \beta J_0(q\rho); \quad \rho_{\mathbf{M}}(\rho) = -\alpha q J_0(q\rho), \quad 0 < z < d. \quad (44)$$

Todas estas densidades sólo dependen de  $\rho$ , por lo tanto el problema tiene simetría azimutal.

El potencial del plano  $z = 0$  tendrá la siguiente forma

$$\Phi_0(\rho) = \int_0^\infty dk A(k) J_0(k\rho) e^{-k|z|}. \quad (45)$$

La condición de salto de la derivada normal de  $\Phi_0$  en  $z = 0$  relaciona  $A(k)$  con  $\sigma_0$ ,

$$\int_0^\infty dk 2k A(k) J_0(k\rho) = -4\pi\beta J_0(q\rho). \quad (46)$$

El miembro de la derecha tiene la forma de un desarrollo de Fourier en las funciones  $J_0(k\rho)$ , de manera que la comparación es inmediata:

$$2kA(k) = -4\pi\beta \delta(k - q). \quad (47)$$



Finalmente,

$$\Phi_0(\rho) = -2\pi\beta \frac{J_0(q\rho)}{q} e^{-q|z|}. \quad (48)$$

Lo que ocurre con la contribución del plano  $z = d$  es muy similar; queda

$$\Phi_d(\rho) = 2\pi\beta \frac{J_0(q\rho)}{q} e^{-q|z-d|}. \quad (49)$$

Para calcular la contribución de las cargas en volumen, mostraremos dos alternativas. La más sencilla consiste en utilizar los resultados anteriores, generalizándolos levemente. Esos resultados nos dicen que un plano en  $z = z'$  con densidad  $\sigma(\rho) = aJ_0(q\rho)$  genera un potencial

$$\Phi_{z'}(\rho) = 2\pi a \frac{J_0(q\rho)}{q} e^{-q|z-z'|}. \quad (50)$$

Ahora bien, una distribución volumétrica de la forma  $\rho_M(\rho) = -\alpha q J_0(q\rho)$  puede pensarse como compuesta de infinitas láminas de espesor  $dz'$ , entre  $z = 0$  y  $z = d$ , cada una con una densidad superficial de carga  $d\sigma(z') = -\alpha q J_0(q\rho) dz'$  y con un potencial dado por las fórmulas anteriores,

$$d\Phi_{z'}(\rho) = -2\pi(\alpha q dz') \frac{J_0(q\rho)}{q} e^{-q|z-z'|}. \quad (51)$$

El potencial debido a  $\rho_M$  será la suma (en realidad una integral) de las contribuciones de cada una de estas láminas,

$$\Phi_V(\rho) = \int d\Phi_{z'}(\rho) = -2\pi\alpha J_0(q\rho) \int_0^d dz' e^{-q|z-z'|}. \quad (52)$$

Si  $z < 0$ , en la integral es siempre  $z' > z$ , y resulta

$$\Phi_V(\rho) = -2\pi\alpha \frac{J_0(q\rho)}{q} e^{qz} (1 - e^{-qd}), \quad z < 0. \quad (53)$$

Si  $z > d$ , entonces en la integral es siempre  $z > z'$ , y entonces

$$\Phi_V(\rho) = -2\pi\alpha \frac{J_0(q\rho)}{q} e^{-qz} (e^{qd} - 1), \quad d < z. \quad (54)$$

En la región intermedia hay que dividir el intervalo de integración en dos tramos, y queda

$$\Phi_V(\rho) = -2\pi\alpha \frac{J_0(q\rho)}{q} [2 - e^{-qz} - e^{-q(d-z)}], \quad 0 < z < d. \quad (55)$$

Si se quiere usar la función de Green para calcular la contribución en volumen, podemos adelantar que la única contribución va a venir del término proporcional a  $J_0$ , ya que por simetría la integral angular en  $\varphi'$  se

va a anular para el resto de los términos:

$$\begin{aligned}
\Phi_V(\rho) &= \int_0^d dz' \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_M(\rho) \\
&= -2\pi\alpha q \int_0^d dz' \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^\infty dk J_0(q\rho') J_0(k\rho') J_0(k\rho) e^{-k|z-z'|} \\
&= -2\pi\alpha q \int_0^d dz' \int_0^\infty dk \frac{\delta(k-q)}{k} J_0(k\rho) e^{-k|z-z'|} \\
&= -2\pi\alpha q J_0(q\rho) \int_0^d dz' e^{-k|z-z'|}, \tag{56}
\end{aligned}$$

que coincide con la expresión (52).

Ahora calculemos el potencial total  $\Phi_0 + \Phi_d + \Phi_V$  en las regiones pedidas. Por encima del imán es

$$\Phi(\rho) = 2\pi \frac{J_0(q\rho)}{q} e^{-qz} (\beta - \alpha) (e^{qd} - 1), \quad d < z. \tag{57}$$

Por debajo,

$$\Phi(\rho) = -2\pi \frac{J_0(q\rho)}{q} e^{qz} (\beta + \alpha) (1 - e^{-qd}), \quad z < 0. \tag{58}$$

El potencial, y por lo tanto los campos  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$  se anulan por debajo del imán si  $\alpha = -\beta$ .

Queda como ejercicio encontrar los campos calculando el potencial vector  $\mathbf{A}$ , en cuyo caso el único término necesario de la función de Green es aquél proporcional a  $J_1$ .

■ Un error frecuente en este ejercicio tuvo que ver con la ortogonalidad de las funciones base en  $\rho$  y en  $\varphi$ . Los desarrollos tienen la forma

$$f(\rho, \varphi) = \sum_{\nu'=0}^{\infty} \int_0^\infty dk' [A_{\nu'}(k') \cos \nu' \varphi + B_{\nu'}(k') \sin \nu' \varphi] J_{\nu'}(k' \rho). \tag{59}$$

El objetivo es despejar los coeficientes  $A_\nu$  y  $B_\nu$ . Para eso, es importante el orden en que se aplican las relaciones de ortogonalidad, puesto que las  $J_\nu$  no son necesariamente ortogonales cuando difieren en el índice  $\nu$ , es decir

$$\int_0^\infty \rho d\rho J_\nu(k\rho) J_{\nu'}(k'\rho) \tag{60}$$

no es proporcional en general a la  $\delta_{\nu\nu'}$  y mucho menos a  $\delta(k - k')$ . Para encontrar  $A_\nu$  y  $B_\nu$ , primero hay que fijar el índice  $\nu'$ , aplicando la ortogonalidad de las funciones sin y cos. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \nu\varphi f(\rho, \varphi) &= \sum_{\nu'=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk' \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \nu\varphi [A_{\nu'}(k') \cos \nu'\varphi + B_{\nu'}(k') \sin \nu'\varphi] \right\} J_{\nu'}(k'\rho) \\ &= \pi \int_0^{\infty} dk' B_{\nu'}(k') J_{\nu'}(k'\rho). \end{aligned} \quad (61)$$

Aquí se usó que  $\int_0^{2\pi} d\varphi \sin \nu\varphi \sin \nu'\varphi = \pi\delta_{\nu\nu'}$ , y que  $\int_0^{2\pi} d\varphi \sin \nu\varphi \cos \nu'\varphi = 0$ . Recién ahora se aplica la ortogonalidad de las funciones  $J_\nu$ , que siempre se escribe con el mismo índice  $\nu$  en todas las funciones de Bessel:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \rho d\rho J_\nu(k\rho) \left[ \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \nu\varphi f(\rho, \varphi) \right] &= \pi \int_0^{\infty} dk' \left\{ \int_0^{\infty} \rho d\rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) \right\} B_{\nu'}(k') \\ &= \pi \frac{B_\nu(k)}{k}. \end{aligned} \quad (62)$$

Notar, sin embargo, que en este problema las fuentes ya estaban escritas como combinaciones lineales (triviales) de las funciones de la base, de modo que era innecesario aplicar las relaciones de ortogonalidad. A esta altura, el detalle puede haberseles pasado por alto. Lo importante es que, una vez visto, ya no se les vuelva a escapar. Hemos encontrado casos similares en otras geometrías: un problema en esféricas con fuentes dipolares daba potenciales exclusivamente dipolares; un problema en cartesianas, con fuentes que iban como  $\cos qx$ , daba potenciales que iban como  $\cos qx$ ; etc. Es como si les estuvieran sirviendo el problema ya descompuesto en sus componentes según los vectores de la base. El análogo mecánico sería un problema en donde todas las velocidades iniciales y las fuerzas estuvieran según una misma dirección: el problema es efectivamente unidimensional. Es lo mismo en estos problemas de electro y magnetostática. En el problema del imán todo ocurre en la *dirección* del versor  $J_0(q\rho)$ .

## Problema 4

(3 pts) **Cuentas**  $\rightarrow \mathbf{0}^+$ . Encontrar la fuerza entre una esfera de radio  $a$ , cargada uniformemente en volumen con carga total  $Q$ , y un cilindro infinito de radio  $b$ , cargado uniformemente en volumen de tal manera que su carga por unidad de longitud es  $\lambda$ . La distancia  $d$  entre el centro de la esfera y el eje del cilindro es mayor que la suma de sus radios.

■ Campos iguales implican fuerzas iguales. El campo producido por la esfera y el cilindro es idéntico (en el exterior de estas distribuciones) al campo producido por una carga puntual  $Q$ , ubicada en el centro de la esfera, y un hilo infinito con densidad lineal de carga  $\lambda$ , ubicado en el eje del cilindro. Si  $\mathbf{d}$  es el vector que

une el eje del cilindro con el centro de la esfera en su punto de máxima aproximación, entonces la fuerza sobre la esfera es

$$\mathbf{F}_{\text{esf}} = Q \mathbf{E}_{\text{cil}}(\mathbf{d}) = Q \frac{2\lambda}{d^2} \mathbf{d}, \quad (63)$$

y es igual a menos la fuerza que experimenta el cilindro. En este problema el tensor de Maxwell sólo hacía las veces de un argumento lógico intermediario. Debido a que la fuerza sobre una distribución de carga puede calcularse como la integral del tensor de Maxwell sobre la superficie de cualquier volumen que la contenga, y puesto que el tensor de Maxwell sólo depende del campo total, la fuerza depende sólo del campo total. Si el campo total es el mismo, la fuerza será la misma. El caso de la esfera y el cilindro puede así reducirse al de una carga y un hilo.

■ Este fue el problema con los peores resultados. Mucha gente planteó la fuerza entre una carga puntual y el hilo infinitamente delgado, pero sin justificación. Conjeturamos que el título mismo del problema les sugirió que la solución debía corresponder al caso más sencillo imaginable. Apenas 6 alumnos, de 34 que entregaron el problema, argumentaron correctamente la equivalencia entre ambas configuraciones.

Es cierto que el formalismo del tensor de Maxwell permitía justificar de manera inmediata el reemplazo de la esfera y el cilindro por una carga y un hilo. Sin embargo, éste no era el único camino posible. Supongamos que el mismo problema hubiera aparecido en un parcial de Física 3. Lo más probable es que hubieran tratado de resolver la fuerza como una integral. Tienen entonces dos alternativas: calcular la fuerza que produce la esfera sobre el cilindro, en cuyo caso integrarían el campo eléctrico de la esfera sobre el volumen del cilindro; o calcular la fuerza que produce el cilindro sobre la esfera, en cuyo caso integrarían el campo del cilindro sobre el volumen de la esfera. Dependiendo de la alternativa que elijan, usarán el resultado conocido del campo eléctrico del cilindro o de la esfera. Es esperable que recuerden o que sepan deducir estos campos, por ser los ejemplos más sencillos de la aplicación de la ley de Gauss. El primero es igual al campo de un hilo y el segundo es igual al de una carga puntual. Hasta aquí no estamos forzando lo que es razonable que un alumno de Física 3 sea capaz de plantear por sí mismo. Una de las alternativas requiere hacer una integral sobre el volumen del cilindro, y la otra sobre el volumen de la esfera. Probablemente un alumno de Física 3 elegiría la segunda, por tratarse de una integral sobre un volumen acotado. Si el eje del cilindro coincide con el eje  $z$ , la fuerza sobre la esfera sería

$$\mathbf{F}_{\text{esf}} = \int_{\text{esf}} d^3 r' \rho_{\text{esf}}(\mathbf{r}') \mathbf{E}_{\text{cil}}(\mathbf{r}') = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} a^3} \int_{\text{esf}} d^3 r' \frac{2\lambda}{\rho'^2} \boldsymbol{\rho}', \quad (64)$$

donde  $\boldsymbol{\rho}' = x' \hat{x} + y' \hat{y}$ . Aquí ya usamos que el campo eléctrico del cilindro es equivalente al de un hilo con densidad lineal  $\lambda$ , y que la densidad de carga de la esfera es  $\rho_{\text{esf}} = Q/(\frac{4\pi}{3} a^3)$ . La integral que queda por resolver no parece sencilla. Ensayemos el otro camino. ¿Qué pasa si calculamos la fuerza de la esfera sobre el cilindro, usando el campo eléctrico conocido de la esfera e integrando sobre el volumen del cilindro? Si se

elige como origen el centro de la esfera, quedaría:

$$\mathbf{F}_{\text{cil}} = \int_{\text{cil}} d^3 r' \rho_{\text{cil}}(\mathbf{r}') \mathbf{E}_{\text{esf}}(\mathbf{r}') = \int_{\text{cil}} d^3 r' \rho_{\text{cil}}(\mathbf{r}') \frac{Q}{r'^3} \mathbf{r}'. \quad (65)$$

La carga de la esfera es una constante, de modo que sale fuera de la integral. Resulta entonces

$$\mathbf{F}_{\text{cil}} = Q \int_{\text{cil}} d^3 r' \frac{\rho_{\text{cil}}(\mathbf{r}')}{r'^3} \mathbf{r}'. \quad (66)$$

Pero ahora la integral que tenemos que resolver tiene la misma forma que aquella que escribiríamos para calcular el campo eléctrico producido por el cilindro en el origen. En efecto, el campo eléctrico del cilindro como función de  $\mathbf{r}$  es

$$\mathbf{E}_{\text{cil}}(\mathbf{r}) = \int_{\text{cil}} d^3 r' \frac{\rho_{\text{cil}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (67)$$

de manera que si  $\mathbf{r} = 0$  se obtiene, a menos de un signo, la misma integral que aparece en la ec. (66). Ya conocemos el campo del cilindro en el origen, de forma que la fuerza que ejerce la esfera sobre el cilindro es

$$\mathbf{F}_{\text{cil}} = -Q \mathbf{E}_{\text{cil}}(0) = -\frac{2\lambda}{d^2} Q \mathbf{d} = -\mathbf{F}_{\text{esf}}. \quad (68)$$

Al revisar el cálculo anterior notamos que lo único realmente fundamental para poder reducir el problema a un caso tan sencillo ha sido que el campo de la esfera es equivalente al de una carga puntual. Si hubiéramos querido calcular la fuerza entre una esfera y una distribución arbitraria de carga (externa a la esfera) el resultado habría sido el mismo:

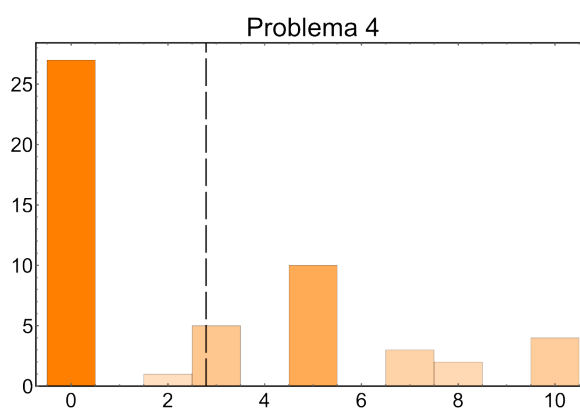
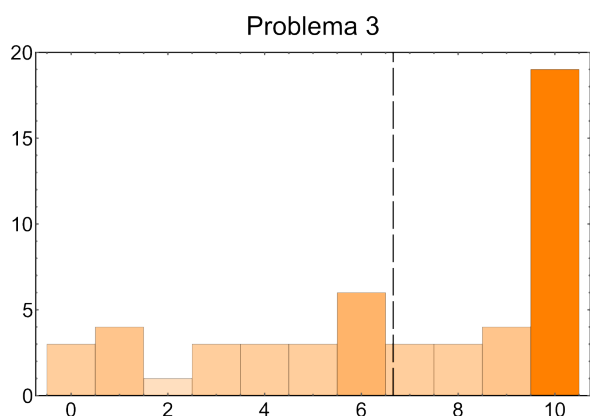
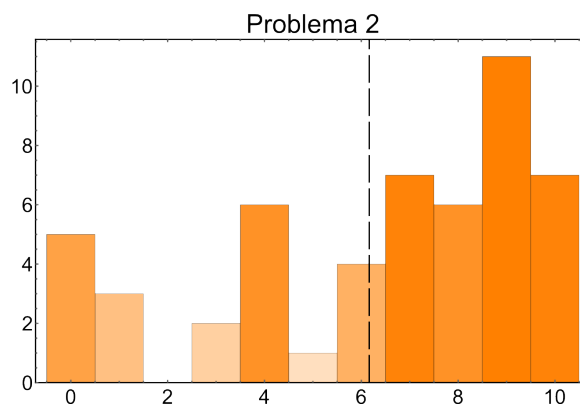
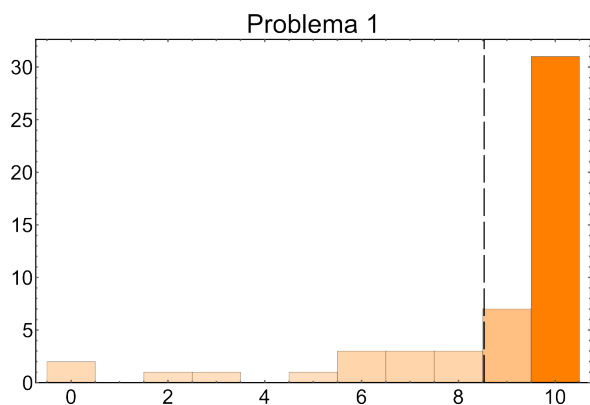
$$\mathbf{F}_{\text{esf}} = Q \mathbf{E}_{\text{dist}}(0). \quad (69)$$

En última instancia, ésta es una expresión más de que el único momento no nulo de una distribución con simetría esférica es el primero. El problema del parcial tiene la simplificación extra de que  $\mathbf{E}_{\text{dist}}(\mathbf{r})$  es también una función sencilla.

Uno no espera que un alumno de Física 3 o aun de Teórica 1 tenga este tipo de ocurrencias, a menos que se lo trate de guiar. El consejo final es: 1) guarden en algún rincón de su memoria que las integrales que involucran dos distribuciones de carga siempre pueden verse desde dos perspectivas diferentes; investiguen el término Gestalt. 2) Este tipo de ocurrencias, como las hemos llamado, se suelen aprender resolviendo los problemas de final de capítulo de los libros, sobre todo aquellos problemas que son de planteo más teórico que práctico. También abundan en el curso de física de Feynman; vean, por ejemplo, la sección 6-4, *The dipole potential as a gradient*.

# Estadísticas

Sobre un total de 52 parciales entregados. En el eje horizontal de los histogramas aparecen las notas de cada problema normalizadas sobre 10 puntos. En el eje vertical, el número de parciales con notas comprendidas en cada intervalo. La línea de trazos vertical representa la media de las notas en cada problema.



## Fórmulas incluidas en la hoja del parcial

Salvo un par de igualdades, que escribimos luego en el pizarrón, las fórmulas siguientes estaban incluidas en la hoja del parcial:

**Algunas relaciones de ortogonalidad:**

$$\int_0^a dx \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) = \frac{a}{2} \delta_{n,n'},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix(k-k')} = 2\pi \delta(k-k'),$$

$$\int_0^{\infty} dx \sin kx \sin k'x = \frac{\pi}{2} \delta(k-k') \quad (k, k' > 0),$$

$$\int_0^{\infty} d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \frac{\delta(k-k')}{k} \quad (k, k' \geq 0),$$

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}.$$

**Función de Green del espacio no acotado:**

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^{\infty} dk \left[ J_0(k\rho') J_0(k\rho) + 2 \cos(\varphi - \varphi') J_1(k\rho') J_1(k\rho) + \text{otras cosas} \right] e^{-k|z-z'|}.$$

**Medios magnéticos:**  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ .

**Operadores diferenciales en coordenadas cilíndricas:**

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho F_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left( \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho F_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{z}.$$

**Dos derivadas:**  $\frac{\partial}{\partial x} [x J_1(x)] = x J_0(x), \quad J_0' = -J_1.$

**Una igualdad:**  $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a.$