FÍSICA TEÓRICA 1 - 2do. Cuatrimestre de 2016

Fórmulas relativistas sin relatividad

El siguiente problema, mencionado al final de la clase de hoy (que, dicho sea de paso, es 24/10/2016), va a estar incluido en la guía de Ondas Planas (¡no en la de Relatividad!). Aquí viene acompañado de un repaso, que les puede servir independientemente del problema propuesto. Lo interesante del asunto es que van a llegar a relaciones válidas en relatividad especial sin necesidad de saber nada de relatividad. Espero que se den cuenta del poder que depositamos en ustedes. Van a descubrir las fórmulas relativistas correctas para la reflexión sobre una interfase en movimiento sin haber escrito ni una sola transformación de Lorentz. Es más, podrían deducir las transformaciones de Lorentz a partir de los resultados de este problema. Van a ver que las cuentas están al alcance de cualquier persona anterior a 1905, lo que me hace sospechar que el efecto Doppler relativista ya era conocido antes de Einstein. Los alumnos con inclinaciones históricas pueden informarnos al respecto.

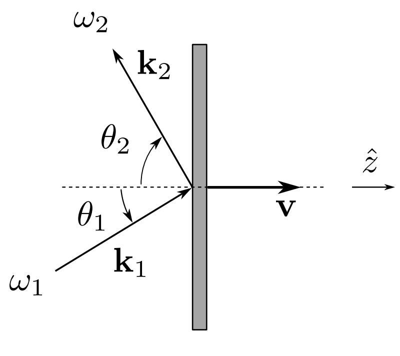
■ El problema dice así: una interfase plana se mueve con velocidad constante. La interfase está definida por la ecuación $z = vt$. En $z < vt$ hay vacío. Del otro lado, moviéndose también a velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{z}$, hay un medio lineal, isótropo y homogéneo, pero no interesa definirlo ni se va a usar para nada. Podría también ser un conductor ideal. Imaginen un espejo en movimiento, por ejemplo. Ahí tienen su interfase. Supongan que incide una onda desde el vacío, con número de onda $\mathbf{k}_1$ (real) y frecuencia ω_1. Pueden tomar, por ejemplo,

$$\mathbf{k}_1 = \cos\theta_1\,\hat{z} + \sin\theta_1\,\hat{x},$$

de manera que todo transcurre en el plano xz. La onda es verdaderamente incidente si $\cos\theta_1 > 0$ y $\omega_1 > 0$. Ahora, procediendo a imagen y semejanza de lo hecho para la interfase en reposo, en donde la igualdad de las frecuencias y de las proyecciones de los números de onda se obtenía pidiendo la cancelación de los términos que dependían del tiempo y de la posición sobre la interfase, su misión es encontrar la frecuencia ω_2 (que no va a ser igual a ω_1) y el número de onda $\mathbf{k}_2$ de la onda reflejada, en particular la relación entre el ángulo de incidencia y el reflejado. Recordar, de paso, que lo convencional es escribir

$$\mathbf{k}_2 = -\cos\theta_2\,\hat{z} + \sin\theta_2\,\hat{x},$$

como muestra la figura:



▪ Idea general y repaso: para la interfase plana en reposo, en las exponenciales asociadas a cada onda aparecían cosas de la forma

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t. \tag{1}$$

Debido a que las condiciones de continuidad se plantean sobre la interfase, importa evaluar las expresiones de la forma (1) en puntos sobre la interfase. La interfase es un plano, y como tal puede parametrizarse así:

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho},$$

donde $\mathbf{r}_0$ es un punto contenido en la interfase y $\boldsymbol{\rho}$ tiene origen en $\mathbf{r}_0$ y su extremo se mueve sobre toda la interfase. En otras palabras, $\boldsymbol{\rho}$ es cualquier vector perpendicular a la normal a la interfase, $\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} = 0$. Por ejemplo, el plano $z = d$ puede definirse por $\mathbf{r}_0 = d\,\hat{z}$, con la parametrización $\boldsymbol{\rho}(x, y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$,

$$\mathbf{r}(x, y) = d\,\hat{z} + x\,\hat{x} + y\,\hat{y}.$$

Estamos pensando en el problema de una interfase y tres ondas: incidente, reflejada y transmitida. Las condiciones de continuidad sobre la interfase involucran siempre tres términos, cada uno asociado a una de las ondas. No interesa escribir las ecuaciones en detalle, todo lo que importa es saber que en cada ecuación que escribamos habrá un término que irá acompañado del factor exponencial asociado a la onda incidente, otro que irá acompañado del factor exponencial de la onda reflejada, y un tercero del de la transmitida. La forma genérica de las ecuaciones de continuidad es entonces

$$A_1 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} + A_2 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)} = A_3 e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - \omega_3 t)}, \quad \text{para todo } t \text{ y } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}, \text{ con } \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{2}$$

Para cancelar las dependencias en t y en $\boldsymbol{\rho}$, deben ser $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, y además deben ser iguales las proyecciones de los números de onda sobre el plano de la interfase, $\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\rho} = \mathbf{k}_2 \cdot \boldsymbol{\rho} = \mathbf{k}_3 \cdot \boldsymbol{\rho}$, lo que en términos geométricos implica la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión, y la ley de Snell para el ángulo de refracción. Incidentalmente, la cancelación de los términos que dependen de t y de $\boldsymbol{\rho}$ reduce las infinitas ecuaciones contenidas en la ec. (2) a una sola:

$$A_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0} + A_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_0} = A_3 e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_0}.$$

Todo esto es para que vean que el asunto estaba en reducir a un número finito el número de ecuaciones, ya que hay un número finito de incógnitas. Más ecuaciones que incógnitas suele ser un mal negocio. Noten además que la cancelación de las exponenciales no es total. Sobreviven ciertas fases, lo que es fundamental cuando hay más de una interfase, porque en ese caso no es posible en general hacer una traslación que haga pasar todas las interfases por el origen. Si hay una única interfase siempre pueden hacer una traslación que transforme $\mathbf{r}_0$ en el origen de coordenadas.

▪ Hasta aquí fue repaso. Ahora toca la interfase en movimiento, que estará definida por una ecuación que depende del tiempo. Fijado t, un punto $\mathbf{r}$ está en la interfase si

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t + \boldsymbol{\rho},$$

donde, como antes $\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} = 0$ y donde $\mathbf{r}_0$ es cualquier punto contenido en la interfase en $t = 0$. Hagan el dibujo. En este problema solamente nos interesa la onda reflejada. La idea es la misma que antes: cancelar sobre la interfase toda dependencia en t y en $\boldsymbol{\rho}$, o mejor dicho, hacer que esas dependencias sean iguales para la onda incidente y la reflejada. Aquí sólo voy a escribir una de las ecuaciones, la asociada a la dependencia temporal, ustedes deduzcan la que falta. Verifiquen entonces que la cancelación de la dependencia temporal en las exponenciales implica que

$$\omega_1 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v} = \omega_2 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v},$$

y deduzcan por su cuenta la condición que produce la cancelación de la dependencia espacial en $\boldsymbol{\rho}$. Particularicen eso para la interfase y la onda incidente propuestas en el segundo párrafo y encuentren ω_2 y $\mathbf{k}_2$ asociados a la onda reflejada. Van a ver que es fácil escribir las condiciones de cancelación (por no decir que es absolutamente trivial), pero que es un poco más complicado despejar ω_2 en términos de ω_1, y aún un poco más complicado relacionar $\cos\theta_2$ con $\cos\theta_1$, $\sin\theta_1$ con $\sin\theta_2$, o alguna relación equivalente. Les prometo que el esfuerzo no es en vano. No se olviden que en vacío $k^2 = \omega^2/c^2$.

▪ Para terminar, un ejercicio súper fácil de mecánica, del que se deduce el efecto Doppler clásico para la reflexión de partículas por una pared en movimiento. En el planteo más sencillo, una sucesión de partículas equiespaciadas y que se mueven con velocidad $c\,\hat{z}$, con $c > 0$, incide perpendicularmente sobre una pared (de masa infinita) que se *aleja* a velocidad constante $v < c$ (lo que contempla también el caso en que la pared se mueve en dirección contraria a las partículas, pues sería $v < 0 < c$). Como se ve, todo ocurre sobre el eje z. Por si hacía falta aclararlo, la pared es perpendicular a $\hat{z}$. Supongan que la distancia entre las partículas incidentes es λ, lo que implica que por un punto dado del eje z pasan partículas incidentes con una frecuencia $\nu = c/\lambda$, o, lo que es lo mismo, frecuencia angular $\omega = 2\pi c/\lambda$. Es decir, pasa una partícula y un tiempo $1/\nu$ después, pasa la siguiente. Las partículas chocan *elásticamente* con la pared. Encuentren la velocidad, la separación y la frecuencia de paso de las partículas reflejadas, c', λ' y ω'. Van a tener que ir y venir del sistema de laboratorio al sistema en que la pared está en reposo, a menos que quieran resolver las ecuaciones de conservación de la energía y del impulso en el choque contra una pared de masa infinita en movimiento. En el sistema en que la pared está en reposo, la velocidad de las partículas simplemente se invierte, no hay que resolver ninguna ecuación. Cualquiera que haya jugado a la paleta, parado una pelota de fútbol o atajado a un bebé previamente lanzado varios metros en el aire (para horror de los aprensivos, y disfrute del tío calavera) advertirá que el problema no escapa a la experiencia habitual.

▪ Y ahora sí, para finalizar: supongan que una partícula incide con un ángulo θ sobre una pared que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ paralela a su normal. Ídem al problema del espejo en movimiento, pero ahora se trata de una partícula y una pared. Todo clásico, todo galileano. Encuentren la relación entre el ángulo incidente y el reflejado, o alguna relación entre sus cosenos, senos, tangentes, o similar.