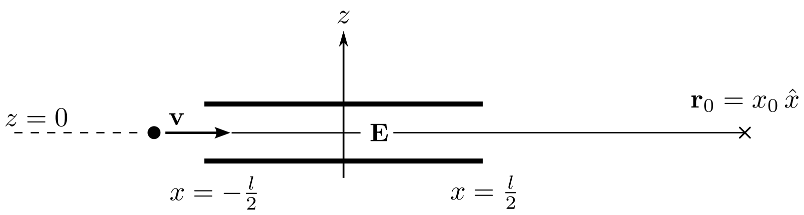
FÍSICA TEÓRICA 1 − 2do. cuatrimestre de 2016
Segundo Parcial − 23/11

1. (6×10^6 pts) Una partícula relativista de carga q y masa m pasa a través de un capacitor de longitud l. Dentro del capacitor hay un campo eléctrico estático cuyo potencial es

$$\Phi(x, z) = \frac{E_0}{k}\, e^{-kz} \sin kx,$$

donde $k = 8\pi/l$. Antes de ingresar al capacitor la partícula se mueve sobre el eje x con velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{x}$, con $v > 0$. La partícula ingresa al capacitor en $t = 0$. Su velocidad es tan alta que apenas se desvía, por lo que su trayectoria puede tomarse igual a $\mathbf{r}(t) = (vt - l/2)\,\hat{x}$.



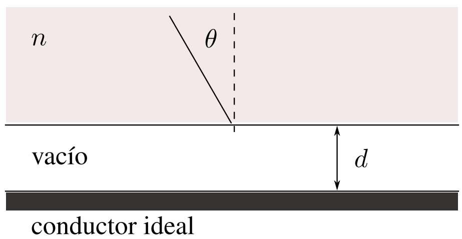
(a) Calcular y **graficar** el campo eléctrico de radiación en función del tiempo en el punto $\mathbf{r}_0 = x_0\,\hat{x}$, donde $l \ll x_0$.

(b) Calcular la potencia por unidad de ángulo sólido en función del tiempo, y la energía total por unidad de ángulo sólido recibida en $\mathbf{r}_0$. Asumir, como antes, que $l \ll x_0$.

2. (6×10^6 pts) En la configuración que muestra la figura, una onda plana con polarización TE y amplitud $\mathbf{E}$ incide sobre la interfase dieléctrico−vacío con un ángulo θ mayor que el ángulo crítico de reflexión total interna. El tercer medio es un conductor ideal ($\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$). En todo el espacio es $\mu = 1$.

(a) Encontrar la amplitud y el módulo al cuadrado de la amplitud de la onda reflejada.

(b) Verificar que para $d \to 0$ y $d \to \infty$ se obtienen los límites adecuados.



3. (5×10^6 pts) Un líquido que tiene índice de refracción $n > 1$, medido cuando está en reposo, se mueve respecto al laboratorio con velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{x}$, con $v > 0$. Ondas planas de frecuencia $\omega > 0$ pueden propagarse dentro del líquido en la dirección $\hat{x}$, con vector número de onda $\mathbf{k} = \kappa\,\hat{x}$, todo referido al sistema del laboratorio.

(a) Encontrar los valores permitidos de κ en función de ω, v y n.

(b) ¿A partir de qué valor de v es imposible propagar ondas contra la corriente en el laboratorio?

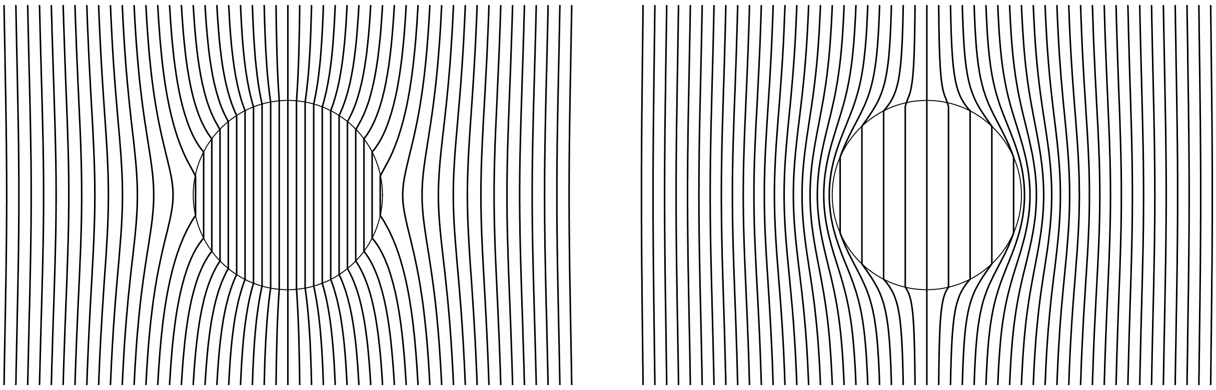
(*Ayuda*: ¿cuáles serían los valores permitidos de κ si v fuese cero? Son dos).

4. (3×10^6 pts) Una esfera de radio a y conductividad σ está rodeada por un medio infinito de conductividad σ'. La densidad de corriente a grandes distancias de la esfera tiende a un valor constante, $\mathbf{j}_0 = j_0\,\hat{z}$. El régimen es estacionario y $\epsilon = \mu = 1$ en todo el espacio.

   (a) Encontrar la densidad de corriente en todo el espacio. (*Ayuda:* verificar que se obtienen los resultados esperados cuando $\sigma = 0$ y $\sigma = \sigma'$).

   (b) Encontrar la densidad de carga sobre la superficie de la esfera.

   (c) La figura muestra las líneas de corriente para dos valores distintos de σ y σ'. ¿Cuál corresponde al caso con $\sigma < \sigma'$ y por qué? (Se pretende una explicación informal en pocas palabras y una demostración formal en base a los resultados de los ítems anteriores).



(i) (ii)

Fórmulas útiles:

- La aceleración de una partícula de masa m y carga q en campos externos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m\gamma}\Big[\mathbf{E} - (\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})\,\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}\Big].$$

- Los campos de una carga en movimiento arbitrario $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = q\left[\frac{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{R^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{n}\times\Big\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\Big\}}{c\,R\,(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\right]_{t'}, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = [\mathbf{n}]_{t'}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t),$$

  donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$, y $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$

- La potencia por unidad de ángulo sólido en un punto $\mathbf{r}$ a tiempo t radiada por una carga en movimiento arbitrario:

$$I(\mathbf{r},t) = \mathbf{S}(\mathbf{r},t)\cdot[R^2\mathbf{n}]_{t'}, \qquad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$

- Una primitiva: $\int dx\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$.
- Unas funciones: $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$, etc.
- Una relación de ortogonalidad $\int_{-1}^{1} dx\ P_l(x)P_m(x) = \frac{2\delta_{lm}}{2l+1}$.
- El gradiente en esféricas: $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\,\hat{r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi}\,\hat{\varphi} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\,\hat{\theta}$.

Problemas en hojas separadas. Se aprueba con un mínimo de 12 millones de puntos zimbabuenses. Las ecuaciones con las unidades mal hacen llorar a San Esferito.