FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. cuatrimestre de 2016

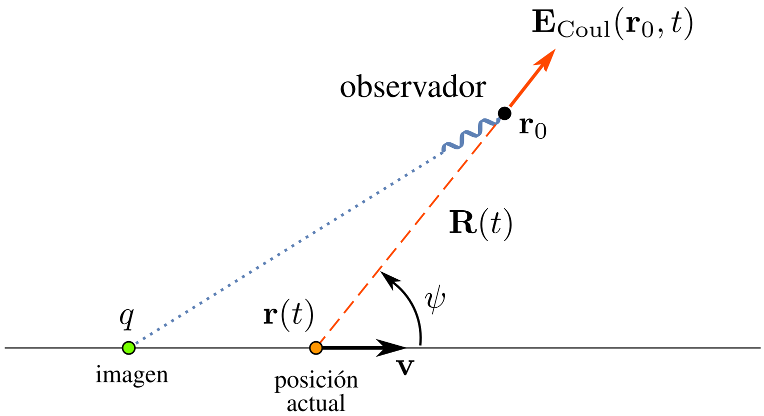
Paradojas del campo coulombiano: tiempos retardados y transmisión instantánea de señales,
o
La carga que tenía libre albedrío

§1

▪ En una de las últimas clases dedujimos que el campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme es

$$\mathbf{E}_{\text{Coul}}(\mathbf{r}_0, t) = q\,\frac{\mathbf{n}/\gamma^2}{(1-\beta^2\sin^2\psi)^{3/2}R^2}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{r}_0$ es la posición del observador, $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$ es el vector que va desde la posición actual de la carga hasta la posición del observador, $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ es el versor asociado a esa dirección y ψ es el ángulo entre la velocidad $\mathbf{v}$ y el vector $\mathbf{R}$. En la Ec. (1) todas las cantidades que dependen del tiempo están evaluadas a tiempo t.



El campo (1) suele llevar el nombre de campo de velocidad o coulombiano. La manera de deducirlo en clase consistió en tomar el campo de una carga estática y en transformarlo a un sistema de referencia inercial en donde la carga se moviera con velocidad $\mathbf{v}$. Es un campo que decae como $1/R^2$, depende de la velocidad, no tiene simetría esférica, aunque sí de revolución respecto del eje definido por $\mathbf{v}$, y tiene simetría de paridad respecto del plano $\psi = \pi/2$. Esto último implica que cambiar el signo de $\mathbf{v}$ deja invariante al campo. Pero la característica más interesante es que el campo apunta en la dirección del vector que va desde la posición actual de la carga hasta el punto de observación.

A varios alumnos les resultó curiosa la circunstancia de que el campo apuntara en la dirección verdadera de la carga, aunque la imagen de la carga, como es natural, se viera un poco retrasada. Como se indica en la figura anterior el observador ve a la carga en cierta posición, que no es donde está la carga ahora sino donde estaba un tiempo atrás. Sin embargo, mide un campo eléctrico que apunta en la dirección en la que la carga está ahora. Solamente alguien sin corazón sería capaz de no preguntarse cómo es posible que, tan sólo con medir la dirección del campo, el observador sepa donde está la carga justo en el mismo instante, aunque la carga esté (exagerando un poco) a años luz de distancia. Lo llamaríamos entonces “El observador que sabía demasiado”.

§**2**

■ Vamos enunciar lo anterior en términos más precisos. El observador ha ido registrando la posición de la imagen de la carga durante cierto tiempo. Esta es la información a la que tiene acceso directo: a tiempo t ve a la carga en la posición $\mathbf{r}_{\rm img}(t)$. Remarcamos que $\mathbf{r}_{\rm img}(t)$ es dónde ve la carga el observador a tiempo t, no dónde está la carga a tiempo t. La luz dispersada o emitida por la carga no llega instantáneamente al observador, de modo que éste siempre la ve un poco en el pasado. De la misma manera que no vemos al planeta Saturno (por decir algo) dónde está ahora sino donde estaba hace unos 80 minutos (datos de la medianoche del 9/11/2016). Todo esto es bastante obvio.

Entonces, decíamos que el observador tiene un registro de las posiciones por donde ha visto pasar a la carga. El registro es la función $\mathbf{r}_{\rm img}(t)$, y cada una de estas posiciones corresponde a la posición que ocupaba la carga en un tiempo anterior al tiempo de observación. En otras palabras, si a tiempo t vemos a la carga en $\mathbf{r}_{\rm img}$, podemos estar seguros de que existió un instante de tiempo t', anterior a t, en el que la carga estuvo efectivamente en la posición $\mathbf{r}_{\rm img}$. De nuevo y sin marearse: si la trayectoria de la carga es* $\mathbf{r}(\tau)$, lo que afirmamos es que si a tiempo t vemos que la imagen de la carga está en $\mathbf{r}_{\rm img}$, entonces existe un único tiempo $t' \leq t$ tal que en t' la carga estaba en la misma posición en la que observamos su imagen a tiempo t:

$$\forall \;\; t \text{ de observación} \qquad \exists! \quad t' \leq t \; / \qquad \mathbf{r}(t') = \mathbf{r}_{\rm img}(t). \tag{2}$$

La única hipótesis necesaria para afirmar esto es que la velocidad de la carga sea menor que c. El contenido de estos enunciados es tan obvio que se corre el riesgo de que resulten incomprensibles. Lo decimos una vez más: si vemos una cosa en cierta posición, esa cosa **estuvo** en esa posición.

Sabiendo que la luz viaja a velocidad c, no es difícil, a partir de la posición observada de la carga, deducir su trayectoria real. Lo que hay que hacer es invertir la ecuación que relaciona una cosa con otra. Si a tiempo t vemos a la carga en $\mathbf{r}_{\rm img}(t)$, eso significa que la carga estaba en esa posición en un tiempo anterior $t' \leq t$. ¿Qué tan anterior? Lo necesario para que la luz haya llegado hasta el observador. Explícitamente,

$$c(t - t') = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{\rm img}(t)|, \tag{3}$$

donde $\mathbf{r}_0$ es la posición del observador. Esto ya permite escribir la trayectoria real de la carga de manera paramétrica: despejando de aquí t', el observador podrá saber que la carga estuvo en la posición $\mathbf{r}_{\rm img}(t)$ a tiempo $t'(t)$. Para cada valor de t obtiene así un punto de la trayectoria $\mathbf{r}(\tau)$,

$$(\mathbf{r}, t')_t \to \left\{ \begin{array}{ll} t' & = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{\rm img}(t)|, \\ & \\ \mathbf{r} & = \mathbf{r}_{\rm img}(t). \end{array} \right. \tag{4}$$

Noten que el despeje de t' es trivial, pero la ecuación de la trayectoria queda en forma paramétrica. Al menos formalmente, siempre podemos escribir la trayectoria real como una función definida de manera explícita

$$\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}_{\rm img}(t(t')), \tag{5}$$

aunque en general suele ser complicado resolver la ecuación implícita y escribir t como función de t'.

*A veces usamos τ como variable muda para escribir una función del tiempo, para evitar la confusión con los tiempos t y t'.

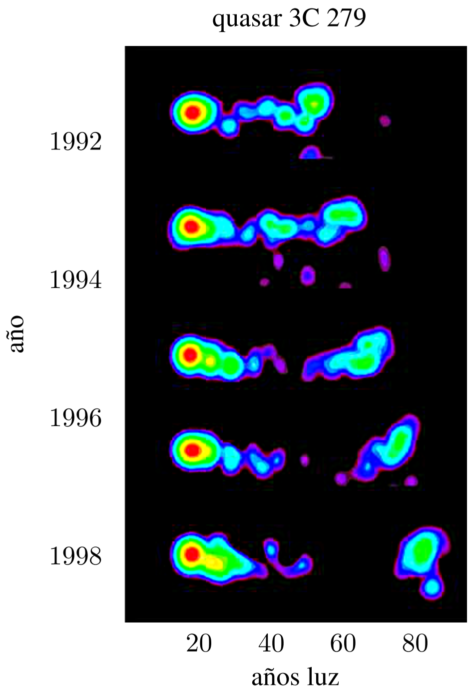
§**3**

■ Recapitulemos: desde su cubil en el punto $\mathbf{r}_0$ el observador registra la posición de la carga según la mira moverse. Debe quedar bien claro cuál es el procedimiento seguido. El observador toma nota de dos cosas:

1) el tiempo t que marca su propio reloj,

2) la posición $\mathbf{r}_{\text{img}}$ en la que observa a la carga en ese momento.

Ésta no es la posición real de la carga a tiempo t, sino la posición en la que el observador la ve a tiempo t. Esa posición corresponde siempre a un punto de la trayectoria en un instante t' anterior a t. Pueden imaginar que los datos son grabados en la forma de una película que muestra simultáneamente la imagen de la carga y el tiempo que marcaba el reloj del observador cuando esa imagen fue registrada, lo que en la jerga se conoce como *timestamp*. Por ejemplo, la figura de abajo muestra una sucesión de fotografías de dos *jets* de materia que se propagan a partir de un punto central, el quásar 3C279. Junto a cada fotografía figura la fecha de captura, que, obviamente, no es la fecha en la que se desarrollaba este fenómeno, a millones de años luz de la Tierra.



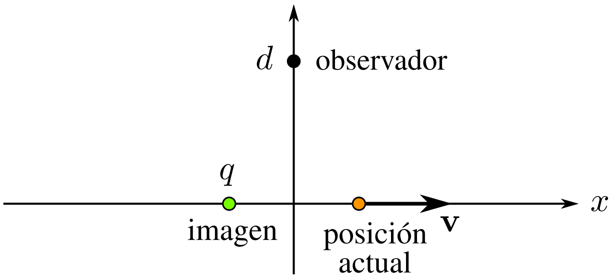
[Noten que en el transcurso de 6 años, la distancia entre los dos objetos aumenta unos 40 años luz, de modo que $v/c \sim 3$ (!). Más abajo diremos algo sobre esta aparente paradoja†.]

En definitiva, se trata de reconstruir la trayectoria de la carga a partir de una filmación en donde los tiempos no se corresponden de manera exacta con las posiciones observadas. No es un asunto conceptualmente difícil, y si la carga se mueve a velocidad menor que c la solución es única y está expresada paramétricamente por la Ec. (4).

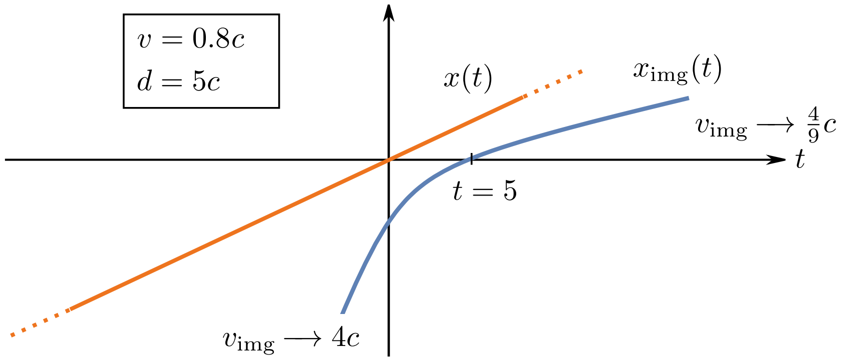
†https://en.wikipedia.org/wiki/Superluminal_motion

§4

Supongamos que el observador grafica la Ec. (4) usando la información contenida en sus registros, $\mathbf{r}_{\text{img}}(t)$, y concluye que la carga se movía a velocidad constante $\mathbf{v}$. Para que tengan una idea de cómo se ve la trayectoria de una carga que se mueve a velocidad constante, supongan que la carga se mueve sobre el eje x y que el observador está sobre el eje y a una distancia d del origen, como muestra la figura.



En estas condiciones la posición registrada por el observador es la curva azul en la figura de abajo, $x_{\text{img}}(t)$.



Se han elegido $v = 0.8c$ y $d = 5c$, y la carga pasa por el origen en $t = 0$. La recta de color naranja es la trayectoria real de la carga. La curva azul es la trayectoria de su imagen, lo que el observador realmente ve. La imagen se mueve de manera acelerada. Parece acercarse con una velocidad máxima de $4c$ y alejarse con una velocidad cercana a $0.44c$. Deduzcan ustedes esos valores límites y convénzanse de que no hay ninguna paradoja. La curva azul pasa por $x = 0$ justo en $t = 5$, pues éste es el tiempo que le toma a la luz ir desde el origen hasta la posición del observador, que, como dijimos, está en $y = 5c$.

Sería bueno dejar claro lo siguiente: para saber qué cosa es la que vería el observador y poder hacer el gráfico anterior, nosotros hemos resuelto de manera numérica la ecuación

$$c(t - t') = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}(t')| \tag{6}$$

para encontrar $t'(t)$ y calcular

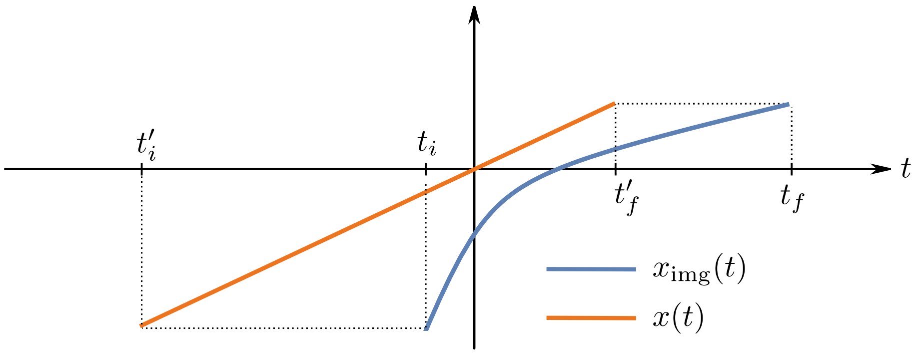
$$\mathbf{r}_{\text{img}}(t) = \mathbf{r}(t'(t)). \tag{7}$$

Es decir, asumimos conocida la trayectoria $\mathbf{r}(\tau)$ y dedujimos lo que vería el observador en $\mathbf{r}_0$. Presten atención al hecho de que el observador hace justamente lo contrario: a partir de $\mathbf{r}_{\text{img}}(t)$ deduce $\mathbf{r}(\tau)$, escribiendo

$$c(t - t') = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{\text{img}}(t)|, \tag{8}$$

y calculando t en función de t', para escribir $\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}_{\rm img}(t(t'))$ y dejar todo finalmente en términos de sus datos. El problema para nosotros es deducir lo que vería el observador en tal o cual circunstancia. El problema para el observador es deducir qué hizo realmente la partícula. El simple movimiento a velocidad constante es visto de manera mucho más extraña que la que podríamos esperar. La imagen de un objeto extenso moviéndose a velocidad relativista debe ser algo digno de verse[‡].

Pueden creer entonces que a partir de $x_{\rm img}(t)$ el observador no tiene dificultad en deducir que la trayectoria real de la carga ha sido $y = 0$, $x(t) = vt$. Con una limitación: si sus observaciones comprenden el intervalo que va de t_i a t_f, a lo sumo puede estar seguro de lo que hizo la carga entre t'_i y t'_f, que son los tiempos que corresponden a la primera y a la última posición registrada de la carga, como muestra la siguiente figura.



La primera observación ocurre en t_i, y corresponde a la posición que ocupaba la carga en t'_i. De igual modo, la última observación, realizada en t_f, corresponde a la posición de la carga en t'_f. Lo que hizo la carga antes de t'_i o lo que hará después de t'_f, sólo puede conjeturarse. Las observaciones realizadas entre t_i y t_f no cubren más que ese intervalo de la historia de la carga.

§5

■ Ahora que ya sabemos qué es lo que ve un observador cuando una carga se mueve a velocidad constante, trataremos de relacionar esto con el campo coulombiano, y buscaremos entender cuál es el significado de que este campo apunte en la dirección real de la carga.

Además de mirar la carga y de tomar la posición de su imagen en función del tiempo, el observador también puede medir el campo coulombiano entre t_i y t_f. Sabe que una carga que se mueve a velocidad constante produce un campo que apunta en la dirección actual de la carga, aunque su imagen aparezca retrasada. El campo le dice que la carga está *aquí*, pero el observador la ve *allá*. Podemos inventar una situación análoga aunque totalmente ficticia: imaginen que el ruido que hace un avión al pasar por el cielo a velocidad constante fuera una especie de campo coulombiano. En tal caso ustedes oirían al avión en su posición actual, aunque lo verían un poco más atrás. De igual forma, el campo coulombiano aparenta tener algo de superlumínico. Oyen a la carga en donde está, aunque la vean en donde estaba un tiempo atrás.

[‡] http://gamelab.mit.edu/games/a-slower-speed-of-light/

Es inevitable preguntarse qué pasa aquí con la velocidad de transmisión de la información. Supongamos que guiado por sus observaciones entre t_i y t_f, o porque una persona de confianza le ha dicho que iba a pasar una carga moviéndose a velocidad constante, el observador da en conjeturar que la trayectoria de la carga es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t \tag{9}$$

para todo tiempo. Si estuviera en lo cierto, entonces la dirección del campo coulombiano le daría la dirección real de la carga instantáneamente, aunque la luz emitida o dispersada por la carga desde esa posición recién estaría iniciando su trayecto hacia el observador. Esto parece violar el enunciado de que existe una velocidad máxima de transmisión de información, puesto que el campo coulombiano medido a tiempo t le estaría proporcionando al observador información acerca de dónde está la carga justo en ese momento, sin que haya transcurrido el tiempo necesario para que las señales desde la carga lleguen hasta el observador.

La cuestión aquí es que el observador tiene información acerca de mis narices. Todo lo que infiere acerca de la trayectoria de la carga fuera del intervalo que va de t'_i a t'_f es conjetural. Si estuviera cien por ciento seguro que de la carga se mueve con velocidad constante, entonces las mediciones del campo coulombiano no agregarían nada a esa información. Si la trayectoria de la carga estaba fijada de antemano con total certeza, el observador no llegará a saber nada que no supiera ya desde el principio.

Decir que el campo coulombiano apunta siempre en la dirección actual de la carga es consecuencia de saber con absoluta seguridad que la carga se mueve con velocidad $\mathbf{v}$, y si el observador ya sabía esto entonces no gana ninguna información al medir el campo, salvo aumentar la confianza en sus informantes, cuya táctica quizá sea construir esa confianza para luego traicionarla vilmente.

Si no hay nadie dispuesto a salir de garantía acerca de cómo se mueve la carga; si todo lo que sabe el observador se limita a sus registros entre t_i y t_f, entonces a lo sumo podrá verificar a posteriori que el campo coulombiano entre t_i y t'_f apuntaba en la dirección real de la carga, tal como debía ser. El intervalo de estas verificaciones comienza en t_i, porque estamos suponiendo que las mediciones se inician ahí, y llega hasta t'_f porque el observador no tiene medios para saber lo que hizo la partícula más allá de t'_f: la última observación, hecha en t_f corresponde al estado de la carga en t'_f.

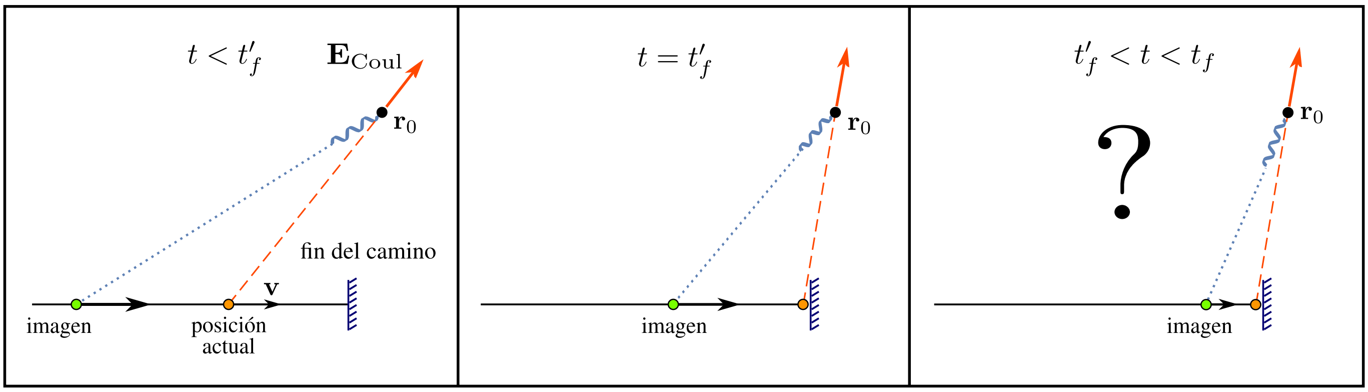
Para poder afirmar, por ejemplo, que en $t > t'_f$ el campo apunta en la dirección real de la carga, sería necesario hacer observaciones durante un intervalo de tiempo mayor, que nos autorice a decir que entre t'_f y t la carga se movió a la misma velocidad. Nunca se trata de una predicción, sino de una comprobación. Si las observaciones se limitan al intervalo entre t_i y t_f, el campo de Coulomb que se mida fuera del intervalo entre t_i y t'_f no apuntará necesariamente en la dirección real de la carga, porque después de t'_f la carga puede haber seguido otra trayectoria, o puede haber chocado contra una pared o puede haberse desintegrado.

§6

■ Si queremos entender por qué el campo coulombiano no da información sobre la posición de la carga, es necesario saber cómo son los campos de una carga en movimiento arbitrario. La discusión anterior partió de la base de que el campo de una carga en movimiento uniforme apuntaba hacia la posición real de la carga. Dijimos que eso no agregaba ninguna información a tiempo real sobre la posición de la carga, porque un campo coulombiano como el de la Ec. (1) presupone conocida la trayectoria. Lo que queremos ver ahora es qué pasa si la carga decide súbitamente hacer otra cosa. ¿Cómo se modifica el campo en ese caso? ¿Sigue apuntando instantáneamente hacia la posición verdadera de la carga? Eso sería verdaderamente extraño.

Vamos a analizar primero un caso particular. Consideremos de nuevo el ejemplo de la carga que se mueve sobre el eje x con velocidad constante entre t_i' y t_f'. El observador registra la posición de la imagen entre t_i y t_f, tal como hizo antes. Pero ahora supongamos que al alcanzar el punto $x(t_f')$ la partícula se detiene abruptamente. Eso ocurre a tiempo t_f'. La imagen de la partícula se detendrá asimismo en el instante t_f, que es el momento en que la luz emitida o dispersada desde $x(t_f')$ llega al observador. La pregunta es: ¿cómo se compara el campo de esta trayectoria con el de la carga en movimiento uniforme que vimos antes?

No cuesta mucho imaginarse que, mientras las cosas sean iguales (aceleración, velocidad, posición), los campos han de ser iguales. En particular, el observador podría comprobar (siempre a posteriori) que entre t_i y t_f' el campo apuntaba en la dirección real de la partícula. La pregunta es: ¿en qué dirección apunta el campo entre t_f' y t_f si la carga se frenó en t_f'? Recordemos que entre t_f' y t_f el observador todavía ve a la carga moviéndose. La imagen de la carga recién se detiene en t_f. Si el campo $\mathbf{E}_{\rm Coul}$ continuase apuntando en la dirección real de la carga entre t_f' y t_f, el observador sabría instantáneamente que la carga se ha detenido. Si ése fuera el caso, estaríamos frente a un mecanismo que permitiría enviar señales con velocidad infinita.



[Para $t < t_f'$ la partícula se mueve a velocidad constante y el campo apunta hacia su posición actual, como en la imagen de la izquierda. La figura central muestra a la carga justo antes de detenerse. En $\mathbf{r}_0$ eso recién se verá un tiempo después, cuando el reloj marque t_f. Durante el intervalo que va desde t_f' hasta t_f, el observador continúa viendo moverse a la carga. ¿En qué dirección apunta el campo coulombiano durante ese intervalo? Si apuntase en la dirección real de la carga (como sugiere la figura de la derecha), antes de que la luz emitida durante el impacto llegase hasta su posición, el observador ya sabría que la carga se ha detenido.]

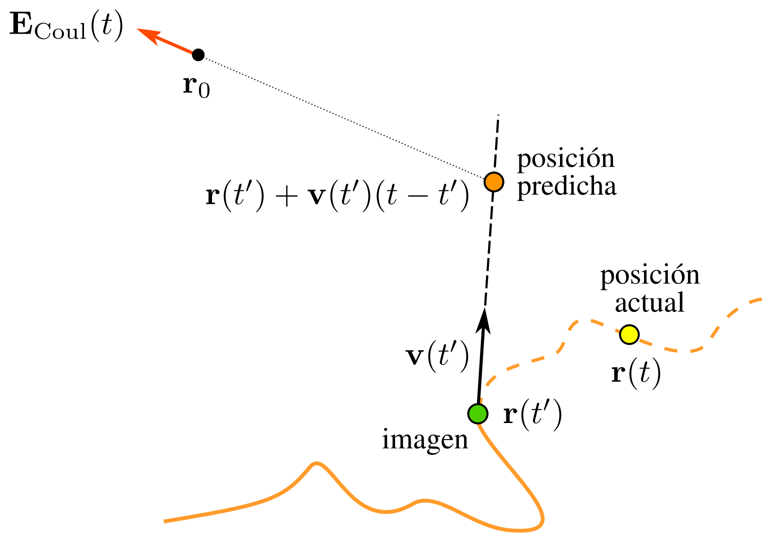
Es razonable inferir que el campo no va a dar indicios inmediatos de que la carga ha dejado de moverse. Más aún, resulta plausible pensar que el campo no dará ningún indicio de que la carga se ha detenido hasta tanto no haya transcurrido el tiempo suficiente para que la imagen de la carga, vista desde $\mathbf{r}_0$, alcance su posición final y el observador vea con sus propios ojos que la carga se ha detenido. Todo esto podrá resultar o no evidente. En cualquier caso, necesitamos dar una justificación más rigurosa, y la manera de hacerlo es diciendo de una vez por todas cómo se calcula el campo de una carga en movimiento arbitrario.

§7

■ En la siguiente sección daremos las fórmulas explícitas. Por ahora alcanza con saber que, en el caso general de una carga en movimiento arbitrario, al campo coulombiano debe agregársele un término que es proporcional a la aceleración,

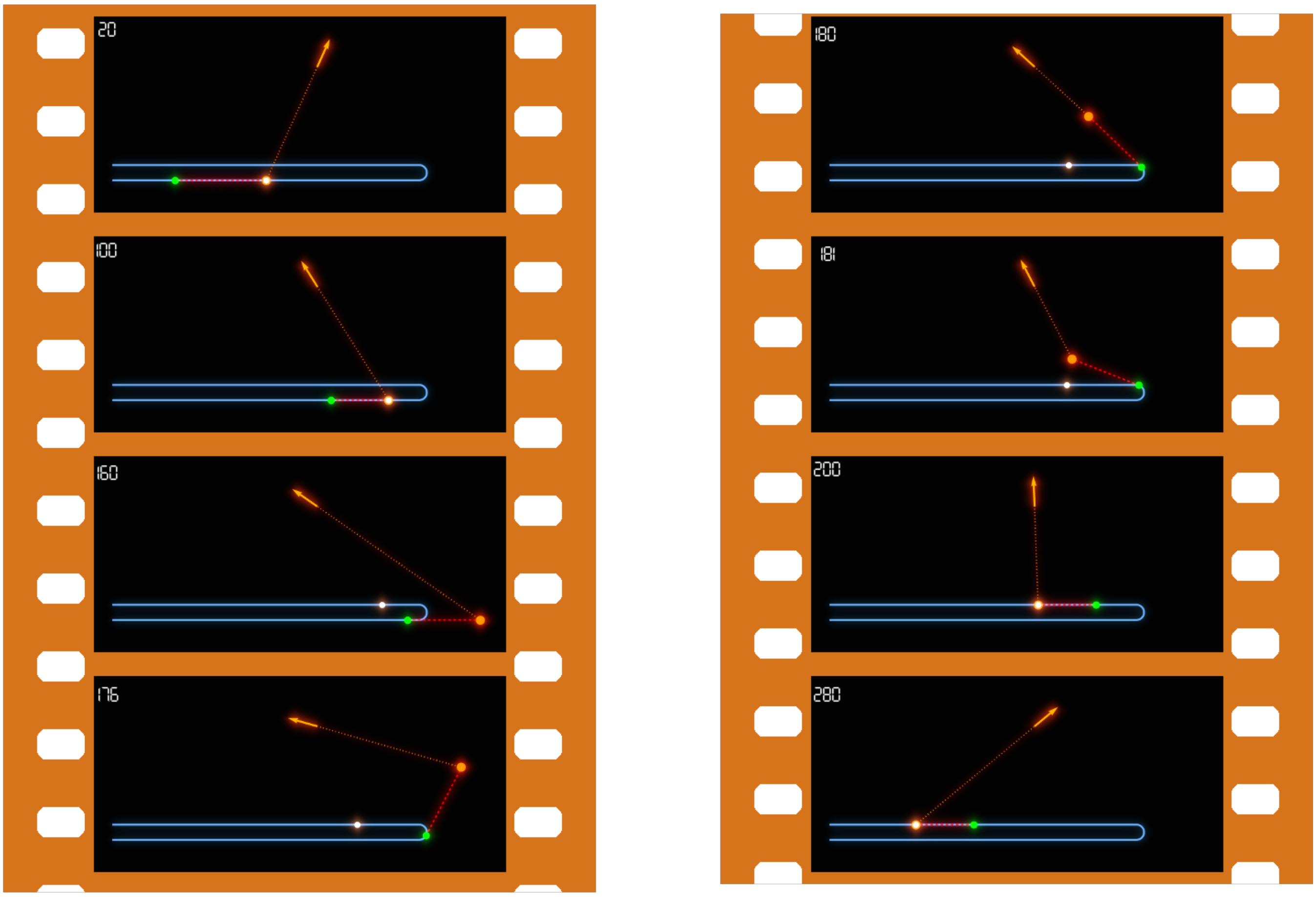
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{Coul}} + \mathbf{E}_{\text{acel}}, \tag{10}$$

donde $\mathbf{E}_{\text{Coul}}$ está dado por la Ec. (1). Notarán inmediatamente que la Ec. (10) esconde una sutileza. Hemos dicho que el campo coulombiano de la Ec. (1) es válido para una carga en movimiento uniforme. Pero si la carga se mueve de manera arbitraria, ¿cómo hay que evaluar la Ec. (1)? La respuesta es muy simple: el campo coulombiano de una carga en movimiento arbitrario, medido desde un punto $\mathbf{r}_0$, es idéntico al campo que produciría esa misma carga si se moviera uniformemente con la velocidad $\mathbf{v}(t')$ y si pasara por la posición $\mathbf{r}(t')$ a tiempo t', donde, como antes, $\mathbf{r}(t')$ es la posición a la que es vista la carga desde $\mathbf{r}_0$ a tiempo t. Esto va a quedar más claro en la figura de abajo.



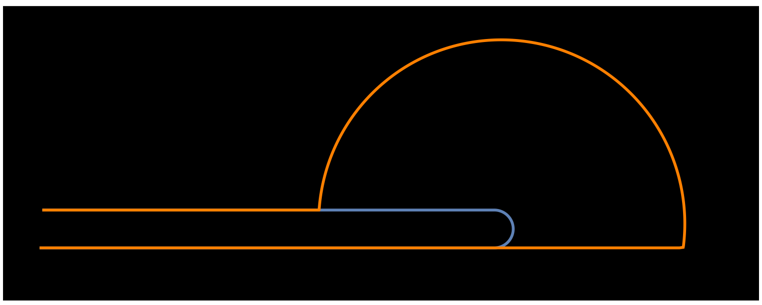
A tiempo t el observador ve a la carga en $\mathbf{r}(t')$, aunque la carga ya está en $\mathbf{r}(t)$, su posición actual. Con los datos de la trayectoria observada hasta tiempo t, el observador deduce cuál era la velocidad de la carga a tiempo t', es decir, $\mathbf{v}(t')$. Usando ese valor de $\mathbf{v}$ y la posición de la imagen, calcula la posición que ocuparía la carga a tiempo t si siguiera moviéndose con la misma velocidad, $\mathbf{r}_{\text{pred}}(t) = \mathbf{r}(t') + \mathbf{v}(t')(t - t')$. Lo único que resta por hacer es evaluar con estos datos la expresión (1), reemplazando $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{\text{pred}}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t')$.

Vamos a ilustrar esto con el ejemplo de una carga que sigue una trayectoria en $\bigcup$. El módulo de su velocidad es constante y el movimiento es rectilíneo y uniforme sobre cada uno de los brazos de la $\bigcup$.

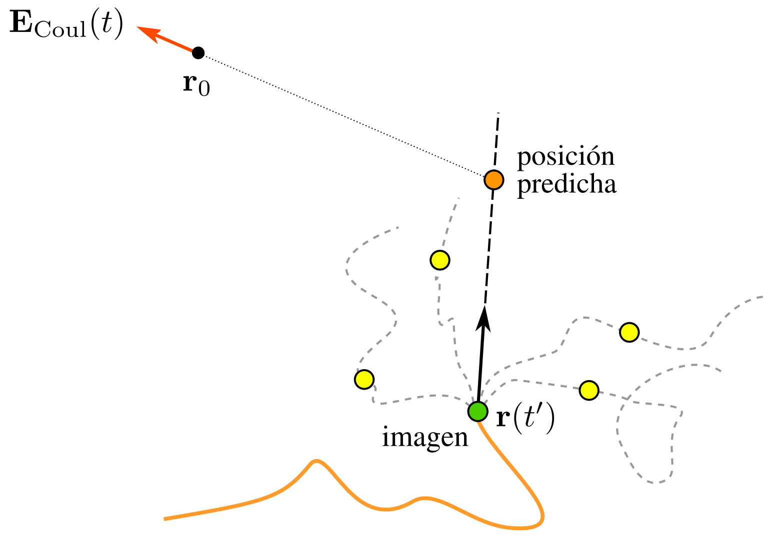


[En el ángulo superior izquierdo de cada cuadro se muestra la marca de tiempo. La partícula se mueve a lo largo de la pista en forma de $\bigcup$. La flecha naranja muestra el campo coulombiano en la posición del observador. En cada cuadro, el punto de color verde muestra dónde ve el observador a la carga. El punto de color naranja es la posición predicha. El punto blanco es la posición actual de la carga, que coincide a veces con la posición predicha. La imagen siempre atrasa respecto de la posición actual. El campo coulombiano siempre apunta en la posición predicha. En la última sección están los links con esta y otras animaciones.]

Si el observador del ejemplo anterior infiriese la trayectoria de la partícula basándose exclusivamente en las mediciones del campo coulombiano, llegaría la conclusión de que la carga hizo algo como lo que muestra la curva naranja en la siguiente figura.



En resumen: el campo coulombiano medido a tiempo t en la posición del observador es exactamente el mismo que produciría una carga q en movimiento uniforme que pasara a tiempo t' por la posición $\mathbf{r}(t')$ y tuviera velocidad $\mathbf{v}(t')$. Por lo que comentamos al principio, este campo apunta en la dirección actual de la carga. Pero cuidado, no de la carga real que sigue la trayectoria arbitraria, sino de la carga ficticia en movimiento uniforme de la que nos valemos para calcular el campo coulombiano. Para decirlo de otra forma, la dirección en la que apunta el campo coulombiano es la que predeciríamos si usáramos la velocidad $\mathbf{v}(t')$ para estimar el movimiento de la carga entre t' y el instante de observación t. Si el movimiento fuera rectilíneo y uniforme, estaríamos en lo cierto al afirmar que la carga está en donde creemos que está, pero no hay ninguna certeza de que sea realmente así. Medir el campo coulombiano no nos permite saber dónde está la carga ahora, sino dónde estaría si, de acuerdo a la última observación realizada, la carga hubiera continuado moviéndose con la misma velocidad. El campo coulombiano no transmite ninguna primicia. En la figura de abajo, si después de t' la carga tomara cualesquiera de las trayectorias indicadas, el campo coulombiano a tiempo t seguiría siendo el mismo.



Las siguientes dos secciones están dedicadas a mostrar cómo es el campo de una carga en movimiento arbitrario y a demostrar que la parte coulombiana del campo apunta hacia la posición predicha de la carga, en el sentido que ya hemos explicado.

§8

■ Cuando vean escrita por primera vez la fórmula para el campo de una carga en movimiento arbitrario, les costará reconocer en la fórmula general el término coulombiano de la Ec. (1), que, como recordarán, era

$$\mathbf{E}_{\rm Coul}(\mathbf{r}_0, t) = q \left[\frac{\mathbf{n}/\gamma^2}{(1-\beta^2 \sin^2\psi)^{3/2} R^2} \right]_t . \tag{11}$$

He aquí el campo eléctrico de una carga en movimiento arbitrario:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) = q \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R^2} + \frac{\mathbf{n} \times \left\{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right\}}{c\, R\, (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'}, \tag{12}$$

donde, como antes, $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$, y $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$. El primer término es el campo de velocidad, o coulombiano, el segundo, el campo de aceleración. Todas las cantidades dentro del corchete deben evaluarse no a tiempo t, sino al tiempo t' que corresponde al punto de la trayectoria que ocupa la imagen de la carga vista desde $\mathbf{r}_0$ a tiempo t, y que satisface la ecuación que ya hemos escrito varias veces:

$$c(t - t') = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{\rm img}(t)| = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}(t')|. \tag{13}$$

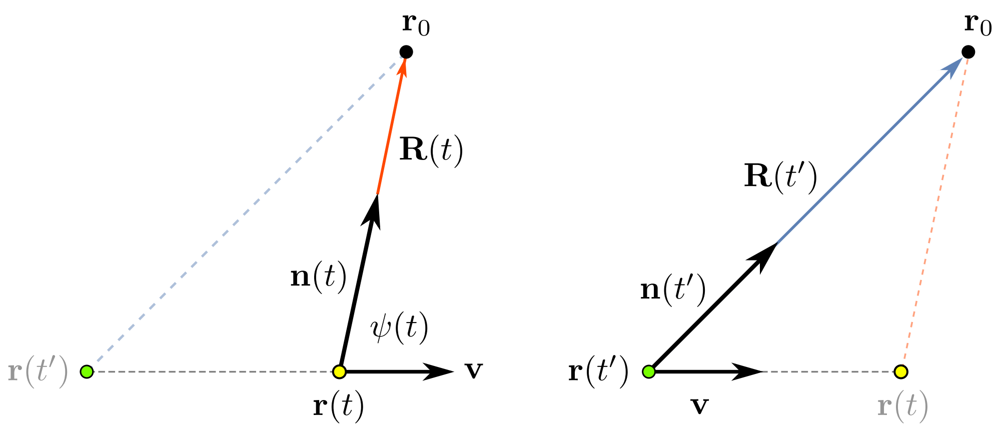
La última igualdad expresa el hecho de que la posición de la imagen a tiempo t es la posición en la que estaba la partícula a tiempo t'. Todo esto **tiene** que ser obvio: los campos medidos en $\mathbf{r}_0$ a tiempo t tienen su origen en lo que hacía la partícula cuando estaba en el punto por la que la vemos pasar cuando nuestro reloj marca t. Si la carga se mueve a velocidad constante, el campo se reduce a la expresión

$$\mathbf{E}_{\rm Coul}(\mathbf{r}_0, t) = q \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R^2} \right]_{t'}. \tag{14}$$

Más abajo probaremos que esta expresión coincide con la Ec. (11). Si bien hay varios términos que se reconocen análogos en ambas expresiones, su igualdad no es nada evidente. Comparen si no:

$$q \left[\frac{\mathbf{n}/\gamma^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2} R^2} \right]_t, \qquad q \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R^2} \right]_{t'}. \tag{15}$$

Para que vean hasta que punto la igualdad no es evidente, noten que la expresión de la izquierda se calcula evaluando todo a tiempo t, mientras que en la expresión de la derecha debe usarse t'.



[Las cantidades que se usan al evaluar cada una de las expresiones (15) del campo coulombiano para una carga en movimiento uniforme.]

§9

Vamos a insistir con esto: los campos de la partícula dependen de lo que estaba haciendo la partícula en el punto de su trayectoria en el que la vemos. La radiación que nos llega desde Saturno, depende de lo que le pasaba a Saturno cuando estaba en el punto de su órbita en el que lo vemos a través de nuestros telescopios *ahora*. Si un astronauta en la Luna se comunicase por radio con la Tierra y, si al mismo tiempo, pudiésemos verlo mediante un telescopio potentísimo, la voz que nos llegaría por la radio estaría sincronizada con el movimiento de sus labios según lo vemos a través del telescopio. Las posiciones de las agujas de un reloj, visto a la distancia con un par de binoculares, dependen del estado del reloj a la hora que, según nuestras observaciones, marcan sus agujas. Cuando vemos una cosa, lo que vemos depende del estado de la cosa cuando hacía lo que vemos que hace. Si a través de un telescopio vemos a una persona que dispone de una serie de botones, cada uno de los cuales enciende una luz de diferente color, el color de la luz que recibimos se corresponde exactamente con el botón que vemos que la persona está apretando. La persona es la imagen de la carga, las luces son su campo y los botones, los parámetros de su trayectoria.

Curso tras curso comprobamos que este concepto tan simple, y que no escapa, en realidad, a la experiencia cotidiana, es uno de los asuntos cuyo manejo es más dificultoso. Todo el mundo entiende que lo que vemos no es el estado actual de la cosas, sino una imagen de cómo eran las cosas en el pasado. Medio microsegundo, si se trata de un colectivo a una cuadra de distancia; poco más de un segundo, si se trata de un astronauta en la Luna; 8 minutos en el caso del Sol; 4 años en el de la siguiente estrella más cercana; etc. Eso no es lo difícil. Lo difícil es no marearse al tratar de llevar ese concepto intuitivo a las fórmulas matemáticas. Cuesta muchísimo familiarizarse con la clase de fenómenos relacionados con el retardo en la transmisión de señales. Y esto no tiene nada que ver con relatividad. Excepto por la forma de los campos, todo lo que hemos dicho se aplicaría igualmente a un mundo galileano. En ningún momento tuvimos que aplicar una fórmula de transformación entre sistemas de referencia, ni tuvimos que decir que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales. Si el nuestro fuese un mundo netamente auditivo, donde el sonido fuera nuestro medio de percepción dominante, tendríamos que hacer el mismo tipo de cálculos y escucharíamos la misma clase de efectos, agravados por la comparativamente baja velocidad del sonido en el aire[§].

§10

▪ Volvamos al campo de la carga en movimiento arbitrario. Lo que queremos mostrar es que la parte del campo que llamamos coulombiana en la Ec. (12),

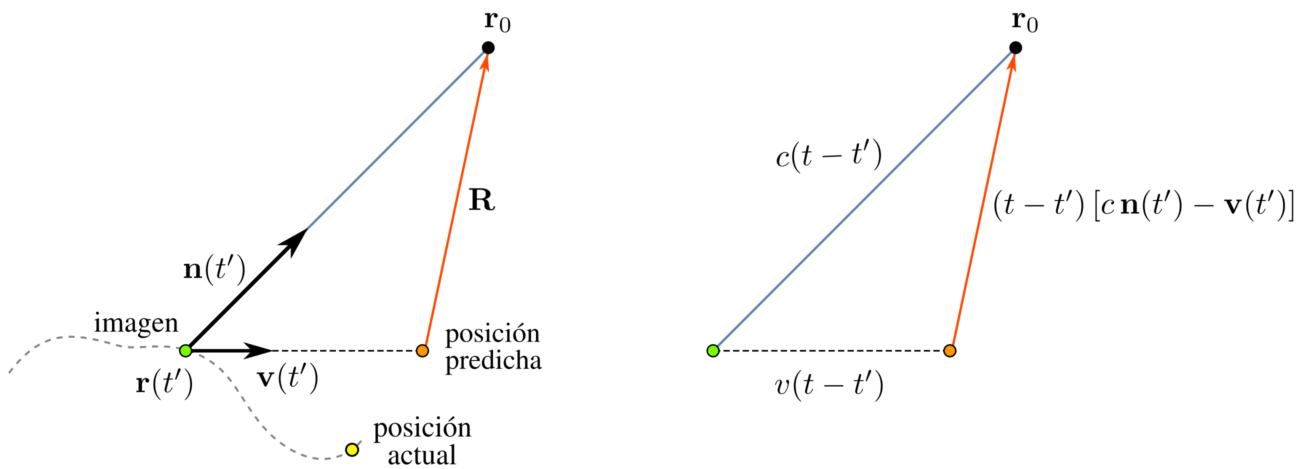
$$\mathbf{E}_{\text{Coul}}(\mathbf{r}_0, t) = q \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{(1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3 R^2} \right]_{t'}, \tag{16}$$

es equivalente al campo que calcularíamos a partir de la Ec. (11) si la carga, en lugar de seguir su trayectoria real, continuase moviéndose en línea recta con velocidad $\mathbf{v}(t')$ a partir de la posición $\mathbf{r}(t')$. Nos conformaremos con demostrar que esto es cierto para la dirección del campo; en cualquier libro pueden consultar

[§] http://materias.df.uba.ar/ft1a2016c2/files/2016/11/paper_efectos-de-retardo-en-la-generacion-de-sonido-2003.pdf cómo el resto de los factores se organiza para reproducir exactamente el campo coulombiano de la carga en movimiento uniforme. La dirección del campo coulombiano de la carga en movimiento arbitrario en la Ec. (16) es la del vector

$$\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t'). \tag{17}$$

En el lado izquierdo de la figura de abajo se muestra la posición de la carga a tiempo t', esto es, el punto $\mathbf{r}(t')$, que es donde el observador ve a la carga a tiempo t, y también se muestra la posición que ocuparía a tiempo t si se moviera constantemente a la velocidad $\mathbf{v}(t')$, esto es, la posición predicha. Su posición actual a tiempo t será, en general, diferente.



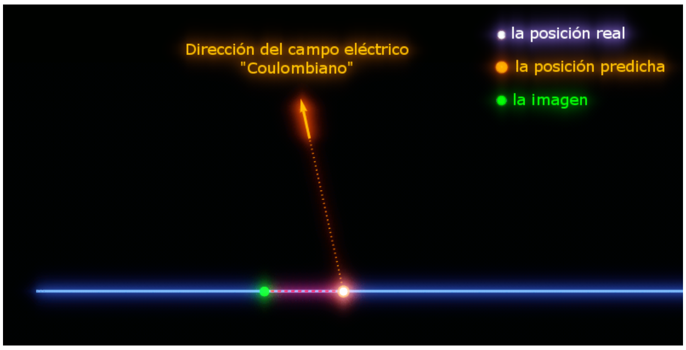
A tiempo t, el observador ve que la carga pasa por el punto $\mathbf{r}(t')$. La distancia que hay desde el observador hasta la imagen de la carga en $\mathbf{r}(t')$ es, por de definición, igual a la distancia que ha recorrido la luz entre t' y t, es decir, $c(t-t')$. Eso está indicado arriba en la figura de la derecha. Por otro lado, la distancia que recorrería la carga si continuara moviéndose a la misma velocidad $\mathbf{v}(t')$ durante el intervalo entre t' y t es igual a $v(t-t')$. Tal como se ve en la figura, el vector $\mathbf{R}$, que va desde la posición de la carga así predicha hasta la posición del observador, está dado por la diferencia

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= c(t-t')\,\mathbf{n}(t') - (t-t')\,\mathbf{v}(t')\\[2ex] &= c(t-t')\,[\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')]\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Este vector tiene la dirección que nos habíamos propuesto verificar, (17). En otras palabras, el campo coulombiano a tiempo t apunta hacia la posición predicha de la carga. En el caso en que la carga se mueve a velocidad constante el campo coulombiano apunta correctamente en la dirección real de la partícula. Sin embargo, el observador no debe caer en la trampa de anticiparse a sus observaciones y anunciar que el campo apunta en la dirección real de la carga. Para poder hacer eso tiene que observar a la carga durante un tiempo extra, hasta que ocupa, o no, las posiciones que había predicho. Si las ocupa, entonces todo se limitó a hacer una verificación de que pasó lo que debía pasar. Y si no, entonces el observador se felicitará por no haber corrido a anunciarle a todo el mundo que la partícula estaba justo ahora mismo en tal lugar.

§11

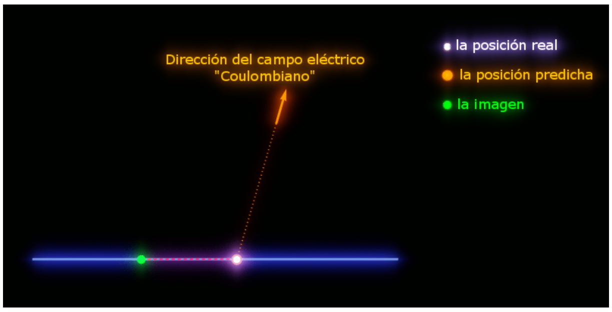
■ Links a las animaciones para el campo de una carga con libre albedrío. *Disclaimer*: podría dañar su vista.



Movimiento a velocidad constante: http://materias.df.uba.ar/ft1a2016c2/files/2016/11/carga_recta_constante_800.gif

Vuelta en U: http://materias.df.uba.ar/ft1a2016c2/files/2016/11/carga_U_cerrada_800.gif

Rizando el rizo: http://materias.df.uba.ar/ft1a2016c2/files/2016/11/carga_looping_the_loop_800.gif



Frenado súbito: http://materias.df.uba.ar/ft1a2016c2/files/2016/11/carga_se_frena_800.gif