

**FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. cuatrimestre de 2016**  
**Segundo Parcial con soluciones**

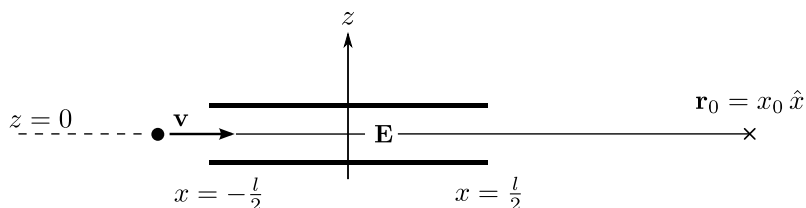
<b>Problema 1</b>	<b>1</b>	<b>Problema 4</b>	<b>8</b>
<b>Problema 2</b>	<b>5</b>	<b>Estadísticas</b>	<b>10</b>
<b>Problema 3</b>	<b>6</b>	<b>Fórmulas incluidas en la hoja del parcial</b>	<b>11</b>

## Problema 1

( $6 \times 10^6$  pts) Una partícula relativista de carga  $q$  y masa  $m$  pasa a través de un capacitor de longitud  $l$ . Dentro del capacitor hay un campo eléctrico estático cuyo potencial es

$$\Phi(x, z) = \frac{E_0}{k} e^{-kz} \sin kx,$$

donde  $k = 8\pi/l$ . Antes de ingresar al capacitor la partícula se mueve sobre el eje  $x$  con velocidad  $\mathbf{v} = v \hat{x}$ , con  $v > 0$ . La partícula ingresa al capacitor en  $t = 0$ . Su velocidad es tan alta que apenas se desvía, por lo que su trayectoria puede tomarse igual a  $\mathbf{r}(t) = (vt - l/2) \hat{x}$ .



- a) Calcular y **graficar** el campo eléctrico de radiación en función del tiempo en el punto  $\mathbf{r}_0 = x_0 \hat{x}$ , donde  $l \ll x_0$ .
- b) Calcular la potencia por unidad de ángulo sólido en función del tiempo, y la energía total por unidad de ángulo sólido recibida en  $\mathbf{r}_0$ . Asumir, como antes, que  $l \ll x_0$ .

■ El campo eléctrico de una carga en movimiento arbitrario  $\mathbf{r}(t)$  es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q \left[ \frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{c R (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$  y donde  $t'$  está dado implícitamente por

$$t - t' = \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|. \quad (2)$$

El primer término en la Ec. (1) es el campo de velocidad, o coulombiano; el segundo término es el campo de aceleración. Se distinguen entre sí por su comportamiento cuando  $R \rightarrow \infty$  y porque el segundo es proporcional a la aceleración.

Por regla general, los campos de radiación de una carga en movimiento arbitrario se obtienen a partir del campo de aceleración, pero no son la misma cosa, como muchos alumnos escribieron. Suponiendo que durante un intervalo de tiempo finito alrededor de  $t'$  la carga realiza un movimiento acotado en torno del origen, el campo de radiación, asociado a ese intervalo de tiempo en la historia de la partícula, se obtiene a través del siguiente límite:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \lim_{r \rightarrow \infty} r \mathbf{E}(r \hat{r}, t) = \frac{1}{r} \lim_{r \rightarrow \infty} r \mathbf{E}_{\text{acel}}(r \hat{r}, t), \quad (3)$$

donde, al tomar el límite, se entiende que

$$t - \frac{r}{c} = \text{cte.} \quad (4)$$

El efecto de esta operación es llevar el punto de observación arbitrariamente lejos, pero a la vez fijando el valor de  $t - r/c$  de modo que siempre se esté observando la misma época en la historia de la partícula. De la misma forma, los programas de televisión emitidos el 3 de diciembre del año 2000 pueden ser vistos ahora mismo a 16 años luz de la posición media que ocupaba la Tierra aquél día; situación que correspondió el año pasado a los puntos que estaban a 15 años luz de distancia, y que corresponderá el año que viene a los que estaban a 17. En cualquier caso, siempre estarán viendo las emisiones del 3 de diciembre del año 2000. Cuanto más lejos se vayan, más tiempo tendrán que esperar, de manera que  $t - r/c$  sea siempre igual al 3 de diciembre del año 2000.

En cierto sentido, los campos de radiación están asociados a una dirección de observación, más que a un punto de observación. Noten que la definición (3) no implica llevar realmente el punto de observación arbitrariamente lejos. La definición vale para cualquier  $\mathbf{r}$ . Lo que ocurrirá es que, a medida que  $r$  aumente,  $\mathbf{E}_{\text{rad}}$  dará una aproximación cada vez mejor al campo de la partícula.

El límite en la Ec. (3) puede tomarse de forma explícita. Hay dos clases de dependencias en  $r$ . Una es meramente geométrica y permite escribir

$$R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')| = \left[ r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}(t')}{r} + \dots \right] \rightarrow r,$$

$$\mathbf{n}(t') = \left\{ \hat{r} - \frac{1}{r} [\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t') \cdot \hat{r} \hat{r}] + \dots \right\} \rightarrow \hat{r}. \quad (5)$$

La otra dependencia en  $r$  es más sutil; tiene que ver con el cálculo de  $t'(\mathbf{r}, t)$ . La ecuación que define  $t'$  puede escribirse como

$$t' = t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}(t') \cdot \hat{r}}{c} - \frac{1}{r} \frac{1}{2c} \left\{ r(t')^2 - [\mathbf{r}(t') \cdot \hat{r}]^2 \right\} + \dots \quad (6)$$

Al tomar  $r \rightarrow \infty$ , manteniendo  $t - r/c = t_r$  constante, queda la ecuación

$$t' = t_r + \frac{\mathbf{r}(t') \cdot \hat{r}}{c}, \quad (7)$$

que determina  $t'$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Finalmente,

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{cr} \hat{r} \times \left[ \frac{(\hat{r} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \hat{r} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'}. \quad (8)$$

Ésta debió ser la ecuación de partida para este problema. Asumiendo que la trayectoria puede ser bien aproximada por  $\mathbf{r}(t) = (vt - l/2) \hat{x}$ , a partir de la fórmula relativista para la aceleración, se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{q}{m\gamma c} [(1 - \beta^2)E_x \hat{x} + E_z \hat{z}], \quad (9)$$

donde

$$\mathbf{E} = E_0 (\sin kx \hat{z} - \cos kx \hat{x}). \quad (10)$$

Recordar que la partícula se mueve sobre el eje  $x$ , de manera que  $z(t) = 0$ ; por eso el factor exponencial  $e^{-kz}$  ha sido reemplazado por 1. Increíblemente, la mayoría de los alumnos calculó el campo eléctrico con el signo equivocado. La dirección al punto de observación  $\mathbf{r}_0 = x_0 \hat{x}$  es  $\hat{r} = \hat{x}$ , de manera que al tomar el producto vectorial resulta

$$\hat{r} \times [(\hat{r} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] = -(1 - \beta) \frac{qE_0}{m\gamma c} \sin kx \hat{z}. \quad (11)$$

La única dependencia en  $t$  en esta ecuación es a través de la coordenada  $x$ , de modo que

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}_0, t) = -\frac{q^2 E_0}{mc^2 \gamma x_0} \frac{\sin kx[t'(\mathbf{r}_0, t)]}{(1 - \beta)^2} \hat{z}. \quad (12)$$

Para determinar  $t'$  usamos la Ec. (7),

$$t' = t - \frac{x_0}{c} + \frac{1}{c} \left( vt' - \frac{l}{2} \right). \quad (13)$$

Como observación al margen, notemos que éste es un caso especial en el que la ecuación aproximada para determinar  $t'$  al calcular el campo de radiación es, en verdad, exacta. Esto se debe a que la velocidad de la partícula siempre está en línea con la dirección de observación, de manera que

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')| = x_0 - x(t'), \quad (14)$$

asumiendo, claro está, que la partícula está a la izquierda del punto de observación. A propósito de esto, algunos alumnos notaron que  $R(t')$  podía calcularse sin hacer ninguna aproximación, y conservaron  $1/R(t')$  en lugar de  $1/x_0$  en la expresión para el campo de radiación. Eso es equivalente a conservar términos de orden  $1/x_0^2$  o superiores. El problema es que la precisión que se gana al escribir  $R(t')$  de manera exacta no

tiene mayor significado si no se incluyen al mismo tiempo los términos del campo de velocidad que decaen también como  $1/R^2$ , y que además no están afectados del factor  $1/c$  que multiplica al campo de aceleración.

En definitiva,

$$t' = \frac{1}{1 - \beta} \left[ t - \frac{1}{c} \left( x_0 + \frac{l}{2} \right) \right]$$

$$\rightarrow x(t') = \frac{vt - l/2 - \beta x_0}{1 - \beta}. \quad (15)$$

El resultado final es

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}_0, t) = -\frac{q^2 E_0}{(1 - \beta)^2 m c^2 \gamma x_0} \sin \left[ k \left( \frac{vt - l/2 - \beta x_0}{1 - \beta} \right) \right] \hat{z}, \quad (16)$$

con la salvedad de que tal expresión vale mientras la imagen de la partícula está dentro del capacitor, es decir, cuando

$$\frac{x_0 + l/2}{c} \leq t \leq \frac{l}{v} + \frac{x_0 - l/2}{c}. \quad (17)$$

Fuera de ese intervalo el campo de radiación es cero. Al atravesar el capacitor la partícula recorre una distancia  $l$ , de modo que el argumento de la función  $\sin kx(t')$  varía en  $8\pi$ , lo que significa que el campo de radiación oscila durante cuatro ciclos.

■ La potencia recibida en  $\mathbf{r}_0$ , asumiendo  $x_0 \gg l$ , es

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} |x_0 \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}_0, t)|^2. \quad (18)$$

La energía total recibida en  $\mathbf{r}_0$  es la integral de la potencia,

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{c}{4\pi} |x_0 \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}_0, t)|^2, \quad (19)$$

donde

$$t_1 = \frac{x_0 + l/2}{c}, \quad t_2 = \frac{l}{v} + \frac{x_0 - l/2}{c}. \quad (20)$$

El intervalo de integración mide

$$\Delta t = \frac{l}{v}(1 - \beta), \quad (21)$$

que es el tiempo que tarda la imagen de la partícula en atravesar el capacitor. Puesto que se trata de integrar una función  $\sin^2$  en un intervalo que incluye cuatro ciclos completos, podría anticiparse que el resultado va a ser  $1/2$  del intervalo de integración. Lo más cómodo, sin embargo, es volver a introducir la variable

$x' = x(t')$ , ya que el argumento de la función  $\sin^2$  es precisamente igual a  $kx(t')$ . Muchos alumnos hicieron esto, pero escribieron mal la relación entre  $dt$  y  $dx'$ , diciendo que

$$\frac{dx'}{dt} = v. \quad (!) \quad (22)$$

En realidad es

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{v}{1 - \beta}. \quad (23)$$

Luego,

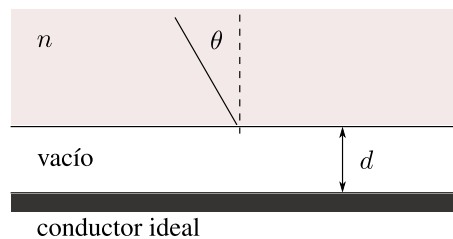
$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \frac{1 - \beta}{v} \int_{-l/2}^{l/2} dx' \frac{c}{4\pi} \left[ \frac{q^2 E_0}{(1 - \beta)^2 m c^2 \gamma} \right]^2 \sin^2 kx' \\ &= \frac{l}{2v} (1 - \beta) \frac{c}{4\pi} \left[ \frac{q^2 E_0}{(1 - \beta)^2 m c^2 \gamma} \right]^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Tal como anticipamos, este resultado podría haberse obtenido reemplazando la integral entre  $t_1$  y  $t_2$  del  $\sin^2 kx(t')$  por  $l/2$  del intervalo de integración dado por la Ec. (21).

## Problema 2

( $6 \times 10^6$  pts) En la configuración que muestra la figura, una onda plana con polarización TE y amplitud  $\mathbf{E}$  incide sobre la interfase dieléctrico–vacío con un ángulo  $\theta$  mayor que el ángulo crítico de reflexión total interna. El tercer medio es un conductor ideal ( $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$ ). En todo el espacio es  $\mu = 1$ .

- Encontrar la amplitud y el módulo al cuadrado de la amplitud de la onda reflejada.
- Verificar que para  $d \rightarrow 0$  y  $d \rightarrow \infty$  se obtienen los límites adecuados.



■ Debido a la condición simplificadora de los campos dentro del conductor, lo más práctico es plantear las ecuaciones de continuidad en cada interfase. Habrá tres ecuaciones para tres incógnitas. Las incógnitas son: la amplitud  $E_2$  del campo reflejado hacia el primer medio, y las amplitudes de los campos asociados a cada una de las ondas en la región intermedia,  $E_3$  y  $E_4$ . Las ecuaciones en la primera interfase ( $z = 0$ ) son

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4,$$

$$n(E_1 - E_2) \cos \theta = (E_3 - E_4) \cos \theta', \quad (25)$$

donde  $\theta'$  es el ángulo usado para definir la dirección de propagación de la onda con amplitud  $E_3$ ,

$$\cos \theta' = i\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1} \equiv i\zeta. \quad (26)$$

En la segunda interfase ( $z = d$ ) la continuidad del campo eléctrico tangencial implica

$$E_2 e^{-\alpha} + E_3 e^{\alpha} = 0, \quad (27)$$

donde

$$\alpha = -i\frac{\omega d}{c} \cos \theta' = \frac{\zeta \omega d}{c}. \quad (28)$$

Despejando  $E_2$  resulta

$$E_2 = E_1 \left[ \frac{n \cos \theta (1 - e^{-2\alpha}) - \cos \theta' (1 + e^{-2\alpha})}{n \cos \theta (1 - e^{-2\alpha}) + \cos \theta' (1 + e^{-2\alpha})} \right]. \quad (29)$$

Aquí se ve que la amplitud al cuadrado de  $E_2$  es igual a la de  $E_1$ , ya que  $\cos \theta'$  es un número imaginario puro, y entonces queda el cociente de un número sobre su conjugado.

Cuando  $d \rightarrow \infty$ , los factores exponenciales tienden a cero y

$$E_2 \rightarrow E_1 \frac{n \cos \theta - \cos \theta'}{n \cos \theta + \cos \theta'}, \quad (30)$$

que es el resultado usual de reflexión en una interfase, independientemente de que haya o no reflexión total interna. Cuando  $d \rightarrow 0$ , los factores exponenciales tienden a 1, y entonces

$$E_2 \rightarrow -E_1, \quad (31)$$

que es el resultado usual para la reflexión en un conductor ideal.

### Problema 3

( $5 \times 10^6$  pts) Un líquido que tiene índice de refracción  $n > 1$ , medido cuando está en reposo, se mueve respecto al laboratorio con velocidad  $\mathbf{v} = v \hat{x}$ , con  $v > 0$ . Ondas planas de frecuencia  $\omega > 0$  pueden propagarse dentro del líquido en la dirección  $\hat{x}$ , con vector número de onda  $\mathbf{k} = \kappa \hat{x}$ , todo referido al sistema del laboratorio.

- Encontrar los valores permitidos de  $\kappa$  en función de  $\omega$ ,  $v$  y  $n$ .
- ¿A partir de qué valor de  $v$  es imposible propagar ondas contra la corriente en el laboratorio?

(Ayuda: ¿cuáles serían los valores permitidos de  $\kappa$  si  $v$  fuese cero? Son dos).

■ Un primer método consiste en escribir el cuadvivector número de onda en el sistema del líquido en reposo y transformarlo al sistema de laboratorio. En tal caso, en el sistema donde el líquido está en reposo es

$$k'^{\mu} = \frac{\omega'}{c}(1, \pm n). \quad (32)$$

Como el problema es unidimensional hemos omitido las otras componentes del cuadvivector. Cada signo tiene en cuenta un sentido de propagación posible. Los dos valores de  $\kappa'$  en el sistema en reposo del líquido son

$$\kappa' = \pm \frac{\omega'}{c}n. \quad (33)$$

Las transformación al sistema del laboratorio da

$$k^{\mu} = \left( \frac{\omega}{c}, \kappa \right) = \frac{\gamma\omega'}{c} (1 \pm \beta n, \pm n + \beta). \quad (34)$$

El dato es la frecuencia en el sistema del laboratorio, por lo tanto

$$\omega = \gamma\omega'(1 \pm n\beta) \rightarrow \gamma\omega' = \frac{\omega}{1 \pm n\beta}. \quad (35)$$

Luego,

$$\kappa_{\pm} = \frac{\gamma\omega'}{c} (\pm n + \beta) = \frac{\pm n + \beta}{1 \pm n\beta} \frac{\omega}{c}. \quad (36)$$

■ El segundo método consiste en pasar del sistema del laboratorio, donde  $k^{\mu} = (\omega/c, \kappa)$ , al sistema del líquido:

$$k'^{\mu} = \gamma \left( \frac{\omega}{c} - \beta\kappa, \kappa - \beta \frac{\omega}{c} \right). \quad (37)$$

Puesto que en el sistema del líquido  $\kappa'$  sólo puede tomar los valores  $\pm n\omega'/c$ , resulta

$$\kappa - \beta \frac{\omega}{c} = \pm n \left( \frac{\omega}{c} - \beta\kappa \right). \quad (38)$$

Finalmente,

$$\kappa_{\pm} = \frac{\pm n + \beta}{1 \pm n\beta} \frac{\omega}{c}. \quad (39)$$

■ El sentido de propagación de la onda en el sistema del laboratorio está dado por el signo de  $\kappa$ . La solución

$$\kappa_{+} = \frac{n + \beta}{1 + n\beta} \quad (40)$$

siempre es positiva, lo que implica propagación en el sentido  $x$  positivo. Esas ondas se mueven a favor de la corriente del líquido. La solución

$$\kappa_{-} = -\frac{n - \beta}{1 - n\beta} \quad (41)$$

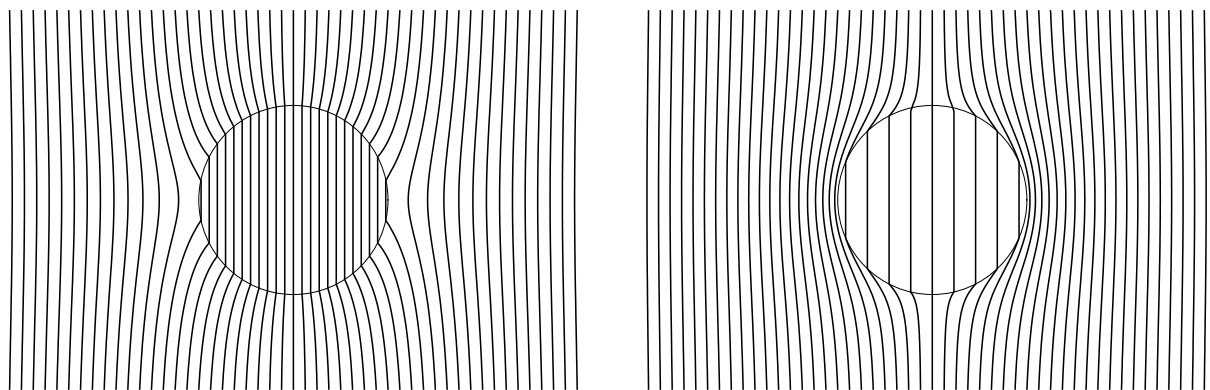
puede tomar cualquier signo. Si  $\beta < 1/n$ , es negativa, lo que implica propagación contra la corriente. Si  $\beta > 1/n$ ,  $\kappa_-$  tiene signo positivo, lo que implica que la onda se propaga a favor de la corriente, al igual que la solución con  $\kappa_+$ . En este caso, la velocidad del líquido es tan alta que es imposible propagar ondas en contra de la corriente. El caso especial en que  $\beta = 1/n$  corresponde a  $\omega' \rightarrow \infty$ . En el sistema de laboratorio  $\lambda \rightarrow 0$  y también la velocidad de propagación.

Las conclusiones sobre la velocidad de la onda en el sistema de laboratorio también podrían hallarse transformando al sistema de laboratorio una velocidad  $\pm c/n$  en el sistema del líquido en reposo.

## Problema 4

( $3 \times 10^6$  pts) Una esfera de radio  $a$  y conductividad  $\sigma$  está rodeada por un medio infinito de conductividad  $\sigma'$ . La densidad de corriente a grandes distancias de la esfera tiende a un valor constante,  $\mathbf{j}_0 = j_0 \hat{z}$ . El régimen es estacionario y  $\epsilon = \mu = 1$  en todo el espacio.

- Encontrar la densidad de corriente en todo el espacio. (Ayuda: verificar que se obtienen los resultados esperados cuando  $\sigma = 0$  y  $\sigma = \sigma'$ ).
- Encontrar la densidad de carga sobre la superficie de la esfera.
- La figura muestra las líneas de corriente para dos valores distintos de  $\sigma$  y  $\sigma'$ . ¿Cuál corresponde al caso con  $\sigma < \sigma'$  y por qué? (Se pretende una explicación informal en pocas palabras y una demostración formal en base a los resultados de los ítems anteriores).



(i)

(ii)

■ En régimen estacionario  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , y además sólo puede haber densidad de carga no nula en las superficies de discontinuidad, porque en las regiones en donde  $\sigma$  es constante vale

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\sigma\rho. \quad (42)$$

El potencial total puede escribirse como la suma de dos términos: uno asociado a las cargas sobre la esfera de radio  $a$ , y otro asociado a un campo eléctrico uniforme que dé cuenta de la condición de contorno para la



corriente en el infinito. Esto es

$$\varphi = -E_0 z + \varphi_a = -\frac{j_0}{\sigma'} r \cos \theta + \varphi_a. \quad (43)$$

Podemos anticipar que la expansión de  $\varphi_a$  sólo contendrá términos proporcionales a  $\cos \theta$ ,

$$\varphi_a(r, \theta) = \frac{Ar_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta. \quad (44)$$

La condición que define  $A$  es la continuidad de la componente normal de  $\mathbf{j}$  en la superficie  $r = a$ ,

$$\begin{aligned} \sigma' \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{a^+} - \sigma \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{a^-} &= 0 \\ \rightarrow -j_0 - \sigma' \frac{2A}{a^2} &= -\frac{\sigma}{\sigma'} j_0 + \sigma \frac{A}{a^2}. \end{aligned} \quad (45)$$

De aquí resulta

$$A = a^2 j_0 \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma'(\sigma + 2\sigma')}. \quad (46)$$

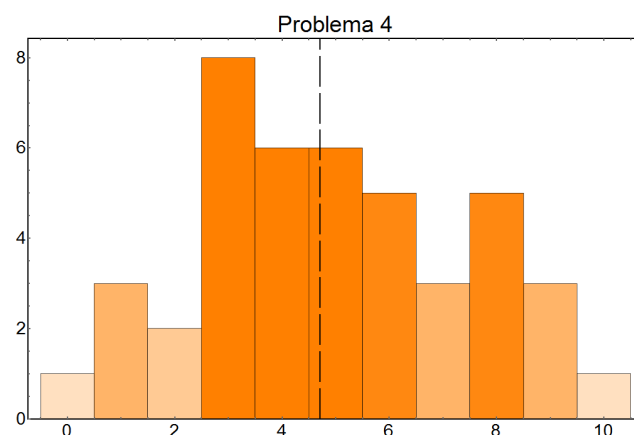
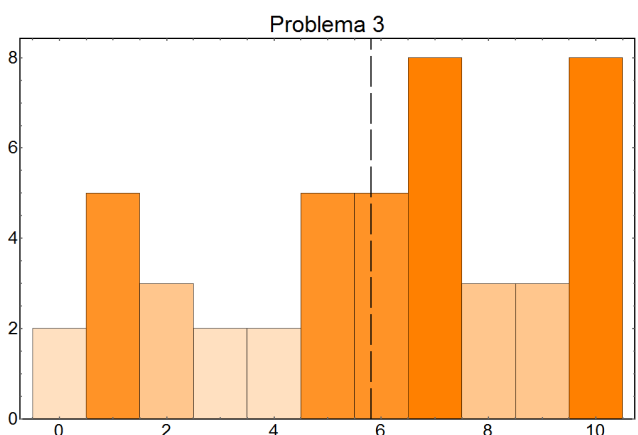
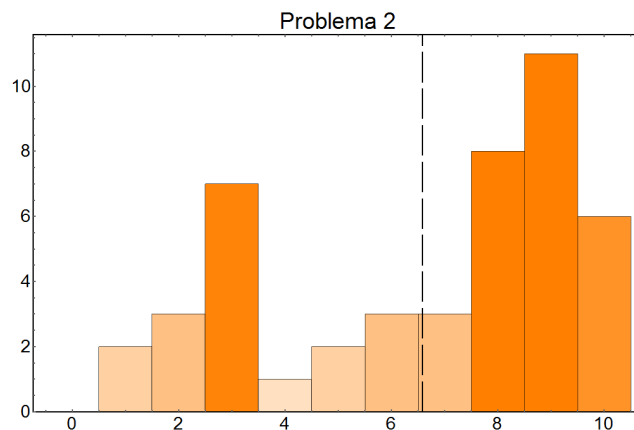
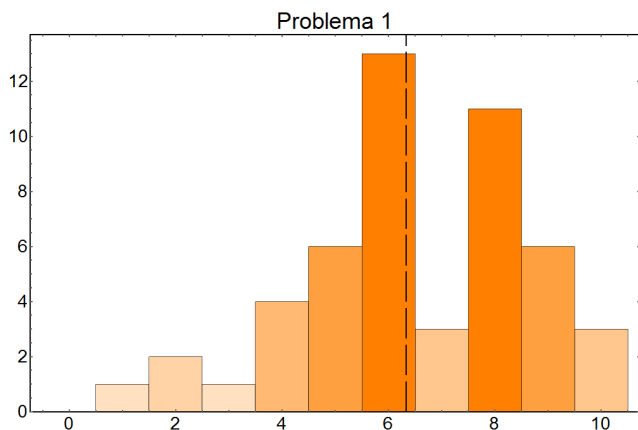
La densidad de corriente es

$$\mathbf{j}(r, \theta) = j_0 \begin{cases} \frac{3\sigma}{\sigma + 2\sigma'} \hat{z}, & \text{si } r < a; \\ \hat{z} + \frac{a^3}{r^3} \left( \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma + 2\sigma'} \right) (3 \cos \theta \hat{r} - \hat{z}), & \text{si } r > a. \end{cases} \quad (47)$$

Si  $\sigma$  es menor que  $\sigma'$ , la densidad de corriente en el interior de la esfera es menor que  $j_0$ . Recíprocamente, si  $\sigma$  es mayor que  $\sigma'$ , la densidad de corriente dentro de la esfera es mayor que  $j_0$ . Esto permite distinguir entre los dos dibujos cuál corresponde a cada caso, puesto que el espaciado de las líneas de corriente indica cuánto vale la densidad. En el caso (i) la densidad es mayor dentro de la esfera, comparada con el valor casi uniforme que alcanza lejos de la esfera.

# Estadísticas

Sobre un total de 52 parciales entregados. En el eje horizontal de los histogramas aparecen las notas de cada problema normalizadas sobre 10 puntos. En el eje vertical, el número de parciales con notas comprendidas en cada intervalo. La línea de trazos vertical representa la media de las notas en cada problema.



Aprobaron 30 de 52. El promedio general fue de 10.91 millones sobre 20 millones de puntos zimbabuenses, todo un record. Convertidos al cambio actual son 5.45 puntos sobre 10. El promedio de los aprobados fue 7 sobre 10. En el primer parcial aprobaron 34 de 52, con un promedio general de 6.4 sobre 10, y de 7.75 sobre 10 para los aprobados.

## Fórmulas incluidas en la hoja del parcial

- La aceleración de una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  en campos externos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ :

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m\gamma} \left[ \mathbf{E} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B} \right].$$

- Los campos de una carga en movimiento arbitrario  $\mathbf{r}(t)$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q \left[ \frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{n} \times \left\{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right\}}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{n}]_{t'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

donde  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$ , y  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$

- La potencia por unidad de ángulo sólido en un punto  $\mathbf{r}$  a tiempo  $t$  radiada por una carga en movimiento arbitrario:

$$I(\mathbf{r}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot [R^2 \mathbf{n}]_{t'}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

- Una primitiva:  $\int dx \sin^2 x = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$ .
- Unas funciones:  $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ , etc.
- Una relación de ortogonalidad  $\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_m(x) = \frac{2\delta_{lm}}{2l+1}$ .
- El gradiente en esféricas:  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta}$ .

Problemas en hojas separadas. Se aprueba con un mínimo de 12 millones de puntos zimbabuenses. Las ecuaciones con las unidades mal hacen llorar a San Esferito.