

Medios Materiales. Desarrollo multipolar

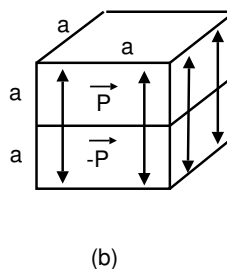
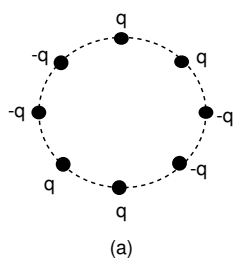
1. Considere una esfera dieléctrica de radio a y permitividad ε_1 sumergida en otro medio de permitividad ε_2 . A una distancia $d < a$ del centro de la esfera se encuentra una carga q .
 - a) Halle el potencial electrostático en todo punto del espacio.
 - b) Halle las densidades de carga de polarización en volumen y superficie.
2. Se tiene una esfera homogénea de permitividad ε y radio b , concéntrica con una cáscara esférica con densidad de carga $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ y radio a , tal como se indica en la figura. El conjunto se halla sumergido en un campo eléctrico uniforme al infinito $\vec{E} = \vec{E}_0 \hat{z}$.
 - a) Calcular el potencial en todo punto del espacio.
 - b) Hallar la distribución de cargas inducidas en $r = b$. (*Sugerencia:* pensar que se puede resolver directamente la ecuación de Poisson o dividir la región en zonas).
3. Una esfera conductora de radio a está a potencial cero. Entre $r = a$ y $r = b$ hay un dieléctrico de permitividad ε , y ubicada a una distancia r' del origen hay una carga q . Considerar $a < b < r'$.
 - a) Hallar el potencial electrostático en todo punto del espacio.
 - b) Hallar las densidades de carga de polarización en volumen y superficie, y las densidades de carga libre en todo el espacio.
 - c) Analizar los casos $\varepsilon = 1$ y $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Ayuda: usando la forma genérica del potencial de una cáscara cargada frente a una esfera (que puede deducirse en una línea), bastará plantear una sola ecuación con una sola incógnita. En otro caso tendrá que plantear 5 ecuaciones con 5 incógnitas.

4. Un medio dieléctrico de permitividad ε ocupa el semiespacio con $z < 0$. A una altura $d > 0$ sobre el dieléctrico hay una carga q .
 - a) Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio usando separación de variables en coordenadas cartesianas.
 - b) Para cada una de las expresiones obtenidas en (a), identifique la contribución al potencial asociada exclusivamente a la carga q . Es decir, escriba $\phi = \phi_q + \phi_r$, donde ϕ_q es el potencial de la carga original. ¿A qué simple distribución de cargas puntuales puede atribuirse, en cada región, la parte restante del potencial, ϕ_r ?
 - c) ¿A qué se reduce la solución cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$? ¿Cuál es la interpretación física de este resultado?
 - d) Generalice los resultados anteriores al caso en que el semiespacio superior está ocupado por un medio con permitividad ε_1 y el inferior por un medio con permitividad ε_2 . En términos de las permitividades, ¿cuál es la magnitud que caracteriza al problema?
 - e) Encuentre la función de Green para todo el espacio según las condiciones del ítem anterior. (Notar que la carga puede estar en cualquier posición, por encima y por debajo del plano $z = 0$.)

5. **Imán esférico.** Una esfera de radio a está uniformemente magnetizada con densidad $\mathbf{M} = M\hat{z}$.
- Calcular los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ usando la integral de Poisson para el potencial escalar magnético $\Phi_{\vec{H}}$, continuo en todo el espacio y tal que $-\nabla\Phi_{\vec{H}} = \vec{H}$. Identificar el problema eléctrico equivalente. Comparar el potencial en el exterior de la esfera con el que produciría un dipolo magnético puntual igual al momento dipolar total de la esfera.
 - Calcular el potencial escalar magnético $\Phi_{\vec{H}}$ usando ahora separación de variables en esféricas.
 - Calcular el potencial vector $\vec{A}$ mediante la integral de Poisson y, a partir de ahí, $\vec{B}$ y $\vec{H}$.
 - La misma esfera magnetizada está ahora situada en un medio lineal, isótropo y homogéneo de permeabilidad μ , que se extiende entre $r = a$ y $r = b > a$, concéntrico con la esfera. Calcule los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio y encuentre el momento magnético total $\mathbf{m}$ inducido en el medio. Verifique que para $\mu = 1$ se obtienen los resultados de los ítems anteriores.
6. **Imán cilíndrico.** Un cilindro de radio a y longitud L está orientado según la dirección z , con sus tapas en $z = \pm L/2$, y está caracterizado por una densidad de magnetización uniforme $\vec{M} = M\hat{z}$.
- Calcular los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ a partir de un potencial escalar magnético $\Phi_{\vec{H}}$, continuo en todo el espacio y tal que $-\nabla\Phi_{\vec{H}} = \vec{H}$. Escribir $\Phi_{\vec{H}}$ como un desarrollo en las funciones de Bessel $J_\nu(k\rho)$ o como una integral de Fourier en z .
 - ¿A qué distribución de corriente es equivalente este imán?
 - A partir del campo del imán, calcular el campo $\vec{B}$ producido por un solenoide cilíndrico, de radio a y longitud L , por el que circula una corriente I y que tiene n espiras por unidad de longitud.
 - Calcular explícitamente los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ del imán cuando $L \rightarrow \infty$.
7. Analizar los momentos multipolares, hasta el cuadrupolar, de las siguientes distribuciones de carga (en el caso de tener momento cuadrupolar, determinar sus ejes principales):
- Un disco cargado con una distribución cilíndricamente simétrica respecto de su eje.
 - Un cubo uniformemente cargado en volumen. Estimar el error porcentual cometido si a un cubo de 10 cm de lado se lo considera como una carga puntual, a distancias del orden de 1 m de su centro.
 - Dos distribuciones lineales formadas por una sucesión equiespaciada, a distancia s , de cargas puntuales: la primera consta de tres cargas en el siguiente orden $q, -2q, q$ y la segunda consta de cuatro cargas $-q, 3q, -3q, q$.

- d) Una distribución plana constituida por cuatro cargas: dos de valor q y dos de valor $-q$, situadas alternativamente en los vértices de un cuadrado de lado s . En los puntos (c) y (d) tomar el límite cuando $s \rightarrow 0$ con $qs^2 \rightarrow cte$.
8. Calcule los momentos multipolares hasta el cuadrupolar inclusive de las siguientes configuraciones:
- a) Cargas puntuales distribuidas sobre un círculo como muestra la figura (a).
- b) Dos cubos con polarización uniforme unidos como muestra la figura (b).



9. Calcular el potencial y el campo creados por un disco de radio a con una densidad superficial de momento dipolar $\vec{P}$ perpendicular al disco. Hacer el cálculo para los puntos situados sobre el eje del mismo. Obtener expresiones límites para puntos muy cercanos y muy lejanos. Graficar e interpretar los resultados.