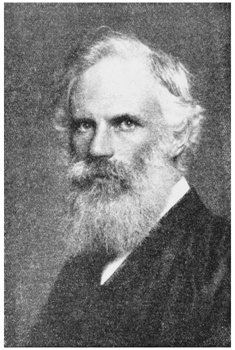
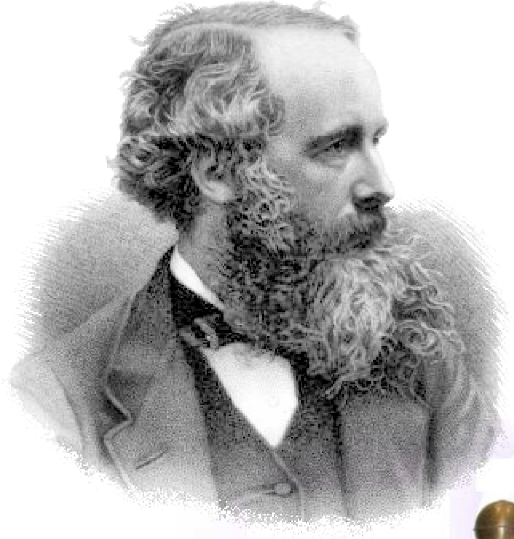
Física Teórica 1

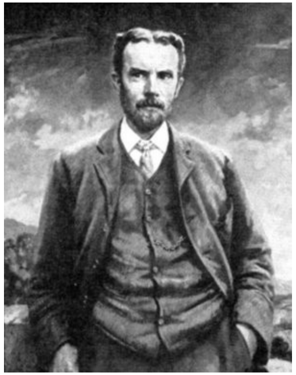


George FitzGerald
1851-1901

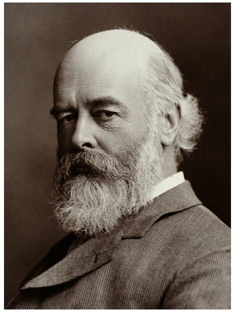


James Clerk Maxwell
1831-1879

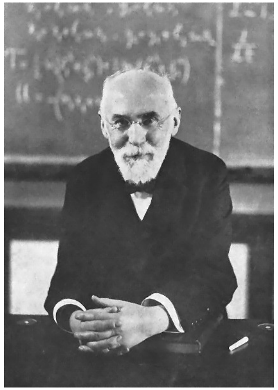
Heinrich Hertz
1857-1894



Oliver Heaviside
1850-1925



Oliver Lodge
1851-1940



Hendrik Lorentz 1853-1928

Todo el electromagnetismo está comprendido en las *Ecuaciones de Maxwell en vacío*

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi\rho_T \qquad \nabla \mathbf{B} = 0$$
$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &+ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_T \end{aligned} \tag{1}$$

Más la *Fuerza de Lorentz*

$$\mathbf{F} = e\left\{\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right\} \tag{2}$$

y la conservación de la carga

$$\frac{\partial \rho_T}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}_T = 0 \tag{3}$$

La gran innovación de Maxwell fue

- Haber introducido la noción de *campo* como un ente con realidad propia, independiente de las cargas que lo generan.
- Haber introducido la *corriente de desplazamiento*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_T \tag{4}$$

que transforma el sistema en una ecuación de ondas

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = 0 \tag{5}$$

La coincidencia numérica entre la constante c y la velocidad de la luz era conocida antes de Maxwell, pero como no había nada que propagar, no se le había dado importancia.

Maxwell da el salto lógico de que, si la luz y las ondas electromagnéticas ambas se propagan a la velocidad c, la luz debía ser una onda electromagnética.

La confirmación experimental (por Hertz) de la teoría de Maxwell llegó veinte años más tarde.

UNIDADES

Nosotros vamos a usar el *Sistema de Gauss*, que es el que se usa en la segunda edición del Jackson.

Este es un *sistema de tres unidades*: las unidades fundamentales son las de masa, longitud y tiempo. *No* se agrega una unidad fundamental para las cantidades electromagnéticas.

Cuando se usan *sistemas de cuatro unidades* (por ejemplo, se agrega una unidad fundamental para la corriente, la carga o la resistencia) es necesario modificar las ecuaciones, agregando constantes que garantizan la consistencia dimensional.

Por la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = e\left\{\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right\} \tag{6}$$

vemos que

$$\begin{aligned} [\mathrm{E}] &= [\mathrm{B}] \\ [\mathrm{Q}]\,[\mathrm{E}] &= [\mathrm{F}] = \mathrm{MLT}^{-2} \end{aligned} \tag{7}$$

Por la Ley de Gauss

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi\rho_T \tag{8}$$

vemos que

$$[\mathrm{E}]\,\mathrm{L}^{-1} = [\mathrm{Q}]\,\mathrm{L}^{-3} \tag{9}$$

Entonces

$$\begin{aligned} [\mathrm{Q}] &= \mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-1} \\ [\mathrm{E}] &= [\mathrm{B}] = \mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{-1/2}\mathrm{T}^{-1} \end{aligned} \tag{10}$$

En mecánica cuántica se introduce la *Constante de Planck* $\hbar$ con unidades de energía por tiempo, o $\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-1}$. Entonces

$$[\mathrm{Q}]^2 = \mathrm{ML}^3\mathrm{T}^{-2} = [\hbar]\,[c] \tag{11}$$

En particular, la *Constante de Estructura Fina*

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \tag{12}$$

(Beck, G., H. Bethe, and W. Riezler, ”Bemerkung zur Quantentheorie der Nullpunktstemperature,”Naturwiss., 19, 39 (1931)).

Además, si

$$[\mathrm{E}] = [\mathrm{B}] = \mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{-1/2}\mathrm{T}^{-1} \tag{13}$$

Entonces $[\mathrm{E}]^2$ y $[\mathrm{B}]^2$ tienen unidades de *densidad de energía*

$$[\mathrm{E}]^2 = [\mathrm{B}]^2 = \mathrm{M}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-2} = \left(\mathrm{M}\mathrm{L}^{2}\mathrm{T}^{-2}\right)/\mathrm{L}^3 \tag{14}$$

Potenciales

Si $\nabla \mathbf{B} = 0$, tenemos derecho a decir que **B** es el rotor de alguien

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{15}$$

A es el *potencial vector*. Por la *Ley de Faraday*

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{16}$$

resulta

$$\nabla \times \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right] = 0 \tag{17}$$

Entonces tenemos derecho a decir que $\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}/c$ es el gradiente de alguien

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{18}$$

Φ es el *potencial escalar*.

DENSIDADES DE CARGA Y POTENCIALES

Una carga puntual q en la posición $\mathbf{x}'$ corresponde a una densidad de carga

$$\rho(\mathbf{x}) = q\delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) \tag{19}$$

y genera un potencial escalar

$$\Phi\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right) = q\phi\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{20}$$

Una *distribución de carga* con densidad ρ genera un potencial

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}'\ \rho\left(\mathbf{x}'\right)\phi\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right) \tag{21}$$

Un *dipolo* $\mathbf{p}$ en la posición $\mathbf{x}'$ genera un potencial escalar

$$\Phi\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right)=\left(\mathbf{p}\cdot\nabla'_{\mathbf{x}}\right)\phi\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right) \tag{22}$$

Una *distribución de momento dipolar* con densidad $\mathbf{P}$ genera un potencial

$$\Phi\left(\mathbf{x}\right)=\int d^3\mathbf{x}'\ \left(\mathbf{P}\left(\mathbf{x}'\right)\cdot\nabla'_{\mathbf{x}}\right)\phi\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right) \tag{23}$$

o, integrando por partes,

$$\Phi\left(\mathbf{x}\right)=-\int d^3\mathbf{x}'\ \left(\nabla\mathbf{P}\left(\mathbf{x}'\right)\right)\phi\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right) \tag{24}$$

Una distribución de momento dipolar $\mathbf{P}$ *es equivalente a una distribución de carga* $\rho=-\nabla\mathbf{P}$

CARGA INDUCIDA

Un campo eléctrico **E** en un medio material deforma las moléculas del medio, de manera que éstas desarrollan un momento dipolar. En conjunto podemos decir que se genera una distribución de momento dipolar con densidad **P**. Para un medio *lineal* e *isótropo*

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \tag{25}$$

χ_e es la *susceptibilidad eléctrica*. Equivalentemente, podemos decir que en presencia del campo **E** se genera una *distribución de carga inducida*

$$\rho_I = -\nabla \mathbf{P} \tag{26}$$

CARGA LIBRE

Llamamos *carga libre* a la que no es carga inducida

$$\rho = \rho_T - \rho_I \tag{27}$$

Como la carga se conserva, si un medio está originalmente descargado la imposición de un campo eléctrico no puede generar una carga neta. Por lo tanto, la carga inducida total en el cuerpo siempre es cero, y la carga neta total es igual a la carga libre total. Esto también se puede deducir del Teorema de Gauss, porque

$$\int_V d^3\mathbf{x}\, \rho = -\int_V d^3\mathbf{x}\, \nabla\mathbf{P} = -\int_{\delta V} d\mathbf{S}\cdot\mathbf{P} = 0 \tag{28}$$

si el volumen de integración comprende todo el medio polarizado.

VECTOR DESPLAZAMIENTO ELECTRICO D

En un medio material, la Ley de Gauss toma la forma

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi\rho_T = 4\pi\left(\rho + \rho_I\right) = 4\pi\left(\rho - \nabla \mathbf{P}\right) \tag{29}$$

o bien

$$\nabla \mathbf{D} = 4\pi\rho \tag{30}$$

donde

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \tag{31}$$

D es el *desplazamiento eléctrico*. En un medio lineal e isótropo

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \tag{32}$$

donde $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$ es la *constante dieléctrica*.

CORRIENTE INDUCIDA

La imposición de campos eléctricos y magnéticos sobre un medio material también puede inducir una corriente eléctrica. La carga inducida y la corriente inducida $\mathbf{j}_I$ satisfacen una ley de conservación

$$\frac{\partial \rho_I}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}_I = 0 \tag{33}$$

o bien

$$\nabla \left(\mathbf{j}_I - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) = 0 \tag{34}$$

Por lo tanto, tenemos derecho a decir que

$$\mathbf{j}_I = c \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \tag{35}$$

M es la *densidad de magnetización* del medio. La *corriente libre* es la que no es inducida, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_T - \mathbf{j_I}$.

EL CAMPO MAGNETICO H

En un medio material, la *Ley de Ampère-Maxwell*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_T \tag{36}$$

se convierte en

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}\right) + 4\pi\nabla \times \mathbf{M} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{37}$$

o bien

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{38}$$

donde $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ es el *campo magnético* (decimos que $\mathbf{B}$ es la *inducción magnética*). En un medio lineal e isótropo $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, donde μ es la *permeabilidad magnética*. Entonces

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{39}$$

donde $\chi_m = (\mu - 1)/4\pi$ es la *susceptibilidad magnética*.

RESUMEN: LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN UN MEDIO MATERIAL

Gauss

$$\nabla \mathbf{D} = 4\pi\rho \tag{40}$$

Las líneas de inducción magnética son cerradas

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \tag{41}$$

Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{42}$$

Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{43}$$

A partir de la clase que viene nos vamos a concentrar en una serie de métodos matemáticos para resolver problemas electroestáticos. En su mayoría, estos métodos fueron desarrollados por matemáticos franceses en la primer mitad del siglo XIX, ya eran conocidos en la época de Maxwell.