LAS ECUACIONES DE MAXWELL

LAS ECUACIONES DE MAXWELL

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

POTENCIAL VECTOR Y POTENCIAL ESCALAR

Como sigue siendo cierto que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, podemos introducir el potencial vector de acuerdo con

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1}$$

A tiene unidades de QL^{-1}.

Ahora la Ley de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

se convierte en

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{3}$$

y por lo tanto podemos introducir un potencial escalar

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \tag{4}$$

o bien

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{5}$$

En un medio lineal e isótropo $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, y $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Las ecuaciones de Gauss y Ampère-Maxwell implican

$$
\begin{aligned}
-\Delta\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A} &= 4\pi\frac{\rho}{\epsilon} \\
\frac{1}{\mu}\left[\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right) - \Delta\mathbf{A}\right] &+ \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

INVARIANCIA DE GAUGE

Los campos no determinan unívocamente los potenciales.
Todavía es posible efectuar una *transformación de gauge*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla f \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \tag{7}$$

Podemos *fijar el gauge* imponiendo una *condición de gauge.*

La elección de la condición de gauge es estrictamente una cuestión de conveniencia. Entre los “gauges” más populares se encuentran

a) El *gauge temporal*

La condición de gauge es $\phi = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} &= 4\pi \frac{\rho}{\epsilon} \\ \frac{1}{\mu}\left[\nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A}\right) - \Delta \mathbf{A}\right] &+ \frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{aligned} \tag{8}$$

En ausencia de cargas libres podemos asumir $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ y entonces

$$\frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu}\Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{9}$$

que describe ondas que se propagan con velocidad $\mathbf{c} = c/\sqrt{\epsilon\mu}$.

$n = \sqrt{\epsilon\mu}$ es el índice de refracción del medio.

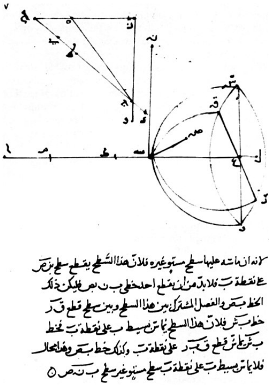
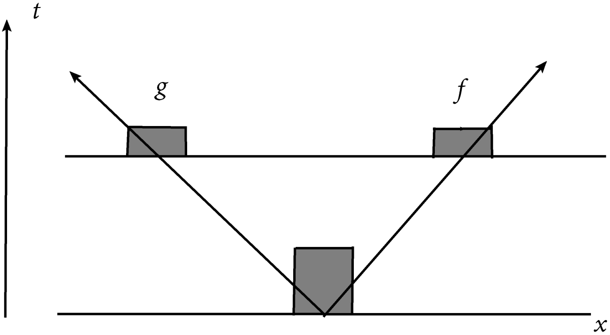


Figura: Ibn Sahl (940-1000), página del “F al-’la al-muriqa” (“Sobre los instrumentos de llama”) (984)

La solución general de una ecuación del tipo

$$\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \tag{10}$$

son funciones $f\,(x - vt)$ y $g\,(x + vt)$, con $v^2 = \beta/\alpha$. Describe ondas que se propagan con velocidad v. Si la velocidad no depende de la frecuencia, decimos que el medio es *no dispersivo*.



b) El *gauge de Coulomb*

La condición de gauge es $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -4\pi\frac{\rho}{\epsilon} \\ \frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &- \frac{1}{\mu}\Delta\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi \end{aligned} \tag{11}$$

Usando la ecuación de continuidad

$$\frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu}\Delta\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\left[\mathbf{j} - \nabla\Delta^{-1}\nabla\mathbf{j}\right] \tag{12}$$

En términos de las transformadas de Fourier de **A** y **j**

$$\frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 A^i_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} + \frac{k^2}{\mu}A^i_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi}{c}\left[\delta^i_j - \frac{k^i k_j}{k^2}\right] j^j_{\mathbf{k}} \tag{13}$$

c) El *gauge de Lorenz*[1]

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\epsilon\mu}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi &= 4\pi\frac{\rho}{\epsilon} \\ \frac{-1}{\mu}\Delta\mathbf{A} + \frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{aligned} \tag{15}$$

Estas dos ecuaciones propagan consistentemente la condición de gauge gracias a la conservación de la carga.

[1] J. D. Jackson y L. B. Okun, *Historical roots of gauge invariance*, Rev. Mod. Phys.73, pp. 663-680 (2001)

Energía e impulso de una onda electromagnética

R. N. C. Pfeifer, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg y H. Rubinsztein-Dunlop, *Colloquium: Momentum of an electromagnetic wave in dielectric media*, Rev. Mod. Phys. 79, 1197 (2007); (E) Rev. Mod. Phys. 81, 443 (2009).

Pietro da Cortona - Batalla de Alejandro contra Darío

Figura: Max Abraham (1875-1922)

No existe una formulación generalmente aceptada de los teoremas de conservación en un medio material. La controversia comenzó con las propuestas de Minkowski (1908) y de Abraham (1909) y todavía continúa. Nosotros vamos a adoptar la formulación de Minkowski.

Figura: Hermann Minkowski (1864-1909)

Consideremos una onda plana en un medio con constante dieléctrica y permeabilidad ϵ y μ, en ausencia de cargas y corrientes libres. Adoptamos el gauge de Lorenz y asumimos $\phi = 0$. La onda tiene la forma

$$\mathbf{A} = A(t)\, e^{i\mathbf{kx}} \tag{16}$$

La amplitud obedece una ecuación de oscilador armónico

$$\frac{\epsilon}{c^2}\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{k^2}{\mu}A = 0 \tag{17}$$

Por lo tanto tiene una energía por unidad de volumen

$$\rho_e = \frac{1}{2}\left[\frac{\epsilon}{c^2}\left|\frac{dA}{dt}\right|^2 + \frac{k^2}{\mu}\left|A\right|^2\right] \tag{18}$$

Como A tiene unidades de QL^{-1} y en el sistema de Gauss Q^2 tiene las mismas unidades que $\hbar c$, o sea ML^3T^{-2}, ρ_e tiene unidades de densidad de energía.

De la ecuación resulta que

$$A(t) = Ae^{-i\omega t} \tag{19}$$

$$k = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c}\omega \tag{20}$$

(ω no depende de las propiedades del medio, k sí). Por lo tanto

$$\rho_e = \frac{\epsilon\omega^2}{c^2}A^2 \tag{21}$$

Supongamos que nuestra onda representa un único fotón. Entonces su energía es $\hbar\omega$, y $\rho_e = \hbar\omega/V$, donde V es el volumen del medio. Entonces

$$A^2 = \hbar c \, \frac{c}{\omega V} \tag{22}$$

Ahora, un fotón también transporta un impulso[2]

$$\mathbf{P} = \hbar \mathbf{k} \tag{23}$$

y por lo tanto la densidad de impulso es

$$p = \frac{\hbar k}{V} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c}\rho_e = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c}\frac{\epsilon\omega^2}{c^2}A^2 \tag{24}$$

[2] A. Einstein, *Zur Quantentheorie der Strahlung*, Physik. Z. 18, p. 121 (1917), reimpreso en B. L. van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics* (Dover, NY, 1968).

Como el fotón viaja a velocidad $c/\sqrt{\epsilon\mu}$, también existe un flujo de energía

$$S = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}\frac{\hbar\omega}{V} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{\omega^2}{c}A^2 \tag{25}$$

y un flujo de impulso

$$T = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}\frac{\hbar k}{V} = \frac{\epsilon\omega^2}{c^2}A^2 \tag{26}$$

Si

$$\mathbf{A} = A\, e^{i(\mathbf{kx}-\omega t)} \tag{27}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} \approx \frac{\omega}{c}A \\
\mathbf{D} &= \epsilon\mathbf{E} \approx \frac{\epsilon\omega}{c}A \\
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \approx kA = \sqrt{\epsilon\mu}\frac{\omega}{c}A \\
\mathbf{H} &= \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{\omega}{c}A
\end{aligned} \tag{28}$$

Comparando

$$
\begin{aligned}
\rho_e &\approx \frac{\epsilon\omega^2}{c^2}A^2 & \mathbf{E} &\approx \frac{\omega}{c}A \\
p &\approx \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c}\frac{\epsilon\omega^2}{c^2}A^2 & \mathbf{D} &\approx \frac{\epsilon\omega}{c}A \\
S &\approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{\omega^2}{c}A^2 & \mathbf{B} &\approx \sqrt{\epsilon\mu}\frac{\omega}{c}A \\
T &\approx \frac{\epsilon\omega^2}{c^2}A^2 & \mathbf{H} &\approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{\omega}{c}A
\end{aligned} \tag{29}
$$

Vemos que $\rho_e \approx ED,\ BH$, $p \approx BD/c$, $S \approx cEH$ y $T \approx DE,\ BH$.

El análisis anterior sugiere que

- Conservemos la forma de la densidad de energía apropiada para el caso estático

$$\rho_e = \frac{1}{8\pi}\{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\} \tag{30}$$

- Para la densidad de impulso proponemos

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) \tag{31}$$

A partir de estas hipótesis, vamos a deducir los flujos de energía e impulso.

Flujo de energía

El flujo de energía es un vector S tal que

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = w \tag{32}$$

donde w es la potencia transferida por cargas o corrientes en el medio al campo electromagnético.

Para calcular $\dot{\rho}_e$, usamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} &= \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial D^2}{\partial t} \\ &= \frac{2}{\epsilon}\mathbf{D}\cdot\dot{\mathbf{D}} = 2\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} \end{aligned} \tag{33}$$

y lo mismo en el otro término.

Entonces

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_e &= \frac{1}{4\pi}\left\{\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}}\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{\mathbf{E}\cdot(c\nabla\times\mathbf{H} - 4\pi\mathbf{j}) + \mathbf{H}\cdot(-c\nabla\times\mathbf{E})\right\} \\
&= \frac{c}{4\pi}\left\{E_i\epsilon^{ijk}\partial_j H_k - H_k\epsilon^{kji}\partial_j E_i\right\} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} \\
&= -\partial_j\left(\frac{c}{4\pi}\epsilon^{jik}E_iH_k\right) - \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

De donde reconocemos que

$$
\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{35}
$$

es el *vector de Poynting*, y $w = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}$ es el efecto Joule.

Flujo de impulso

El *flujo de impulso* es un tensor T^{ij} tal que

$$\frac{\partial p^i}{\partial t} + \partial_k T^{ik} = -f^j \tag{36}$$

donde f^j es la fuerza por unidad de volumen entre los campos y las cargas o corrientes inmersas en el medio.

Si $d\mathbf{s}$ es un elemento de área, $T^{ij} ds_j$ es la componente i del impulso que fluye a través de ds por unidad de tiempo.

A partir de la propuesta de Minkowski, encontramos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p^i}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi c}\epsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial t}\left(D_j B_k\right) \\
&= \frac{1}{4\pi c}\epsilon^{ijk}\left[\left(c\epsilon_{jlm}\partial_l H^m - 4\pi j_j\right) B_k + D_j\left(-c\epsilon_{klm}\partial_l E^m\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[B^k\partial_k H^i + D^k\partial_k E^i - B^k\partial_i H_k - D^k\partial_i E_k\right] - \frac{1}{c}\left(\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)^i
\end{aligned}
\tag{37}
$$

ahora

$$
\begin{aligned}
B^k\partial_k H^i &= \partial_k\left(B^k H^i\right) \\
D^k\partial_k E^i &= \partial_k\left(D^k E^i\right) - 4\pi\rho E^i \\
B^k\partial_i H_k &= \frac{1}{2}\partial_i\left(B^k H_k\right) \\
D^k\partial_i E_k &= \frac{1}{2}\partial_i\left(D^k E_k\right)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Por lo tanto, efectivamente

$$\frac{\partial p^i}{\partial t} = -\partial_k T^{ik} - f^j \tag{39}$$

donde

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[B^k H^i + D^k E^i - \frac{1}{2}\delta^{ik}\left(B^j H_j + D^j E_j\right)\right] \tag{40}$$

es el *tensor de esfuerzos de Maxwell*, y

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{41}$$

representa el intercambio de impulso a través de la fuerza de Lorentz.

Es interesante notar que en un medio isótropo

$$T^{jk} = T^{kj} \tag{42}$$

Además

$$T_k^k = -\rho_e \tag{43}$$

La propuesta de Abraham es escribir $\mathbf{p} = \mathbf{S}/c^2$. Las dos propuestas coinciden en el vacío.