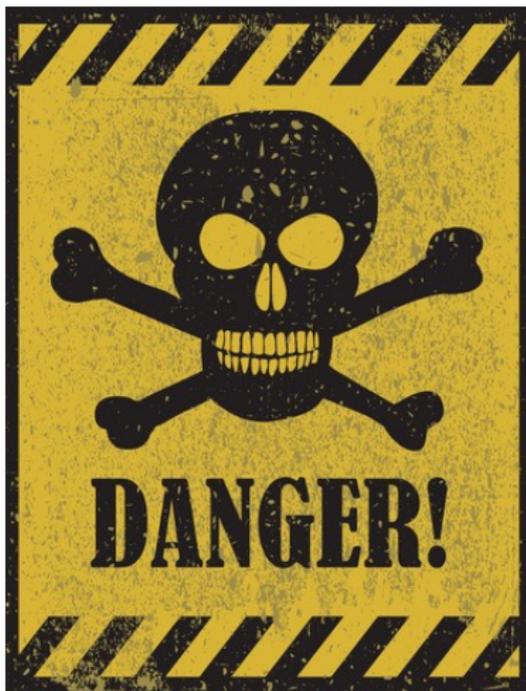


MATEMATICAS ALL'USO NOSTRO



WARNING



Sloppy math may be hazardous for your training

VECTORES

Un espacio vectorial (real) es un conjunto donde está definida la suma (operación asociativa, conmutativa, con elemento neutro y simétrico) y la multiplicación por escalares (números reales). \mathbf{R}^3 es un espacio vectorial real donde

$$\begin{aligned}(x, y, z) + (x', y', z') &= (x + x', y + y', z + z') \\ \lambda(x, y, z) &= (\lambda x, \lambda y, \lambda z)\end{aligned}\tag{1}$$

El cero es el triple $(0, 0, 0)$ y el elemento simétrico a (x, y, z) es $(-x, -y, -z)$.

Un *cambio de variables* es una transformación biyectiva $(x, y, z) \leftrightarrow (\xi, \eta, \zeta)$. Las *componentes contravariantes* del vector $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ se definen como

$$E^\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} E_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} E_y + \frac{\partial \xi}{\partial z} E_z \quad (2)$$

etc. Las *componentes covariantes* se definen como

$$E_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi} E_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} E_y + \frac{\partial z}{\partial \xi} E_z \quad (3)$$

etc. En coordenadas cartesianas no distinguimos entre las componentes co y contravariantes, $E_x = E^x$, etc. La distinción es significativa en coordenadas curvilíneas.

CONVENCION DE EINSTEIN

Si en una expresión aparece un índice repetido, una vez covariante y la otra vez contravariante, se sobreentiende el símbolo de suma sobre todo el rango.

EJEMPLO: producto interno de dos vectores

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \equiv E^x D_x + E^y D_y + E^z D_z$$

escrito bajo la convención de Einstein se convierte en

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \equiv E^i D_i \quad (4)$$

A. Einstein, retrato de 1921 \mapsto



APLICACION: El producto interno de dos vectores es un invariante

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} &= E^\alpha D_\alpha \\ &= E^i \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\alpha} D_j \\ &= E^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} D_j \\ &= E^i D_i\end{aligned}\tag{5}$$

LA DELTA DE KRONECKER



Figura: Leopold Kronecker
(1823-1891)

La *delta de Kronecker* es el tensor mixto δ_j^i cuyas componentes valen 1 si $i = j$ y 0 si no.

La delta de Kronecker es invariante frente a cambios de coordenadas

$$\begin{aligned}\delta_{\beta}^{\alpha} &= \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^{\beta}} \delta_j^i \\ &= \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^{\beta}} \\ &= \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \xi^{\beta}} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha = \beta \\ 0 & \text{if } \alpha \neq \beta \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

EL SIMBOLO DE LEVI-CIVITA

La *símbolo de Levi-Civita* es el tensor completamente antisimétrico ϵ^{ijk} cuyas componentes valen 1 si (i, j, k) es una permutación cíclica de $(1, 2, 3)$



Figura: Tullio Levi-Civita
(1873-1941)

APLICACIONES

Cálculo de determinantes: Si

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \det A &= A_1^1 A_2^2 A_3^3 - A_1^1 A_3^2 A_2^3 + A_2^1 A_3^2 A_1^3 \\ &\quad - A_2^1 A_1^2 A_3^3 + A_3^1 A_1^2 A_2^3 - A_3^1 A_2^2 A_1^3 \\ &= \epsilon^{ijk} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon^{ijk} \epsilon_{i'j'k'} A_i^{i'} A_j^{j'} A_k^{k'} \end{aligned} \quad (8)$$

Producto vectorial

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ E^1 & E^2 & E^3 \\ H^1 & H^2 & H^3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_i = \epsilon_{ijk} E^j H^k \quad (10)$$

Producto mixto

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \epsilon_{ijk} A^i E^j H^k \quad (11)$$

Contracciones del símbolo de Levi-Civita

- ▶ $\epsilon^{ijk}\epsilon_{ilm}$: La única forma de que la suma sobre i no de idénticamente 0 es que $j \neq k$ y $(l, m) = (j, k)$ o $(l, m) = (k, j)$, en cuyo caso sobrevive el único término en que $i \neq j \neq k$. En el primer caso los dos símbolos son iguales y el producto da 1, en el segundo tienen signos opuestos y el producto da -1 . Por lo tanto

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_l^j \delta_m^k - \delta_m^j \delta_l^k \quad (12)$$

- ▶ $\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijl}$: contrayendo el resultado anterior encontramos

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk}\epsilon_{ijl} &= 3\delta_l^k - \delta_l^j \delta_j^k \\ &= 3\delta_l^k - \delta_l^k = 2\delta_l^k \end{aligned} \quad (13)$$

APLICACION: Baca menos caballo

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_i &= \epsilon_{ijk} A^j (\mathbf{B} \times \mathbf{C})^k \\ &= \epsilon_{ijk} A^j \epsilon^{klm} B_l C_m \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon^{klm} A^j B_l C_m \\ &= (\delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l) A^j B_l C_m \\ &= B_i (A^j C_j) - C_i (A^j B_j) \end{aligned} \quad (14)$$

o sea

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (15)$$

OPERADORES DIFERENCIALES

- ▶ Gradiente de un escalar: $(\nabla\phi)_i = \phi_{,i}$
- ▶ Divergencia de un vector: $\nabla \cdot \mathbf{A} = A^i_{,i}$
- ▶ Rotor de un vector: $(\nabla \times \mathbf{A})^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k$

PROPIEDADES



$$\phi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}) = \nabla\phi \cdot d\mathbf{x} \quad (16)$$

$\nabla\phi$ es ortogonal a las superficies de nivel de ϕ , y apunta en la dirección de ϕ creciente

▶ $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

Esto el Papa exclamó al firmar la bula con que furioso excomulgó a Lutero: La divergencia de un rotor es nula y el rotor de un gradiente es siempre cero.

▶ $\nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}$

Luis N. Epele, H. Fanchiotti, C. A. García Canal, *Electrodinámica* (Alianza (1996)).

EL LAPLACIANO

El laplaciano de un escalar es $\Delta\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \partial^i \partial_i \phi$

El laplaciano de un vector es $\Delta\mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

$$\begin{aligned}(\Delta\mathbf{A})^i &= \partial^i (\partial_j A^j) - \epsilon^{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial^l A^m) \\ &= \partial^i \partial_j A^j - (\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j) \partial_j \partial^l A^m \\ &= \Delta(A^i)\end{aligned}\tag{17}$$

*El gran fraile alemán invocó a Dios
y exclamó con su habitual vehemencia:
El rotor de un rotor más nabra dos
da el gradiente de toda divergencia.*

LA DELTA DE DIRAC



$$\int_A dx f(x) \delta(x) = f(0) \quad (18)$$

si $0 \in A$,

$$\int_A dx f(x) \delta(x) = 0 \quad (19)$$

si $0 \notin A$;

$$f(x) \delta(x - x') = f(x') \delta(x - x')$$

$$\delta(\phi(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|\phi'(x_0)|}$$

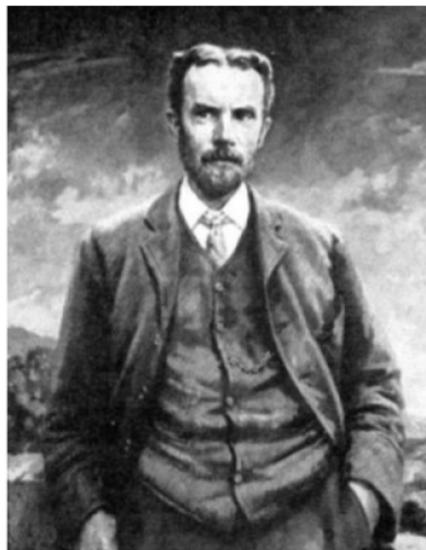
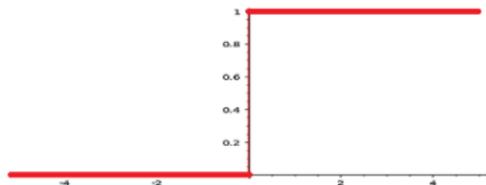
$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (20)$$

donde $\phi(x_0) = 0$

$$(i\hat{\phi} - m)\psi = 0$$

LA FUNCION DE HEAVISIDE

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x dx' \delta(x')$$
$$\delta(x) = \theta'(x) \quad (21)$$



Oliver Heaviside
1850-1925

TEOREMAS INTEGRALES

Normalmente se definen integrales de área y de línea y luego se demuestran los teoremas de Gauss y de Stokes.

Nosotros vamos a hacer al revés: vamos a ver cómo tenemos que definir las integrales de área y de línea para que los teoremas de Gauss y de Stokes se vuelvan tautológicos.



Figura: Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

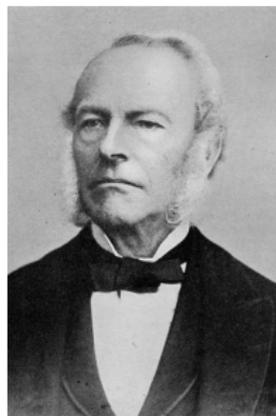
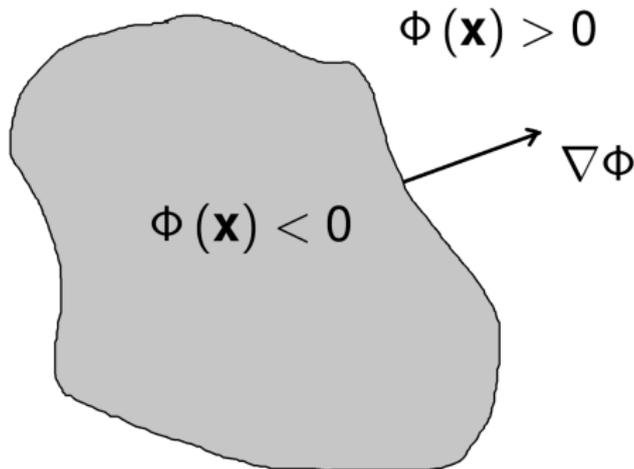


Figura: George Gabriel Stokes
(1819-1903)

Teorema de Gauss Supongamos que un dominio V es definido por una función Φ tal que $\Phi(\mathbf{x}) < 0$ si $\mathbf{x} \in V$ y $\Phi(\mathbf{x}) > 0$ si $\mathbf{x} \notin V$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{A} &= \int d^3x \theta(-\Phi[\mathbf{x}]) \partial_j A^j \\ &= \int d^3x \delta(-\Phi[\mathbf{x}]) \partial_j \Phi[\mathbf{x}] A^j \\ &= \int d^3x \delta(\Phi[\mathbf{x}]) \nabla \Phi \cdot \mathbf{A} \equiv \int_{\delta V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \quad (22) \end{aligned}$$



Para obtener Teorema de Gauss, debemos definir el elemento de área como

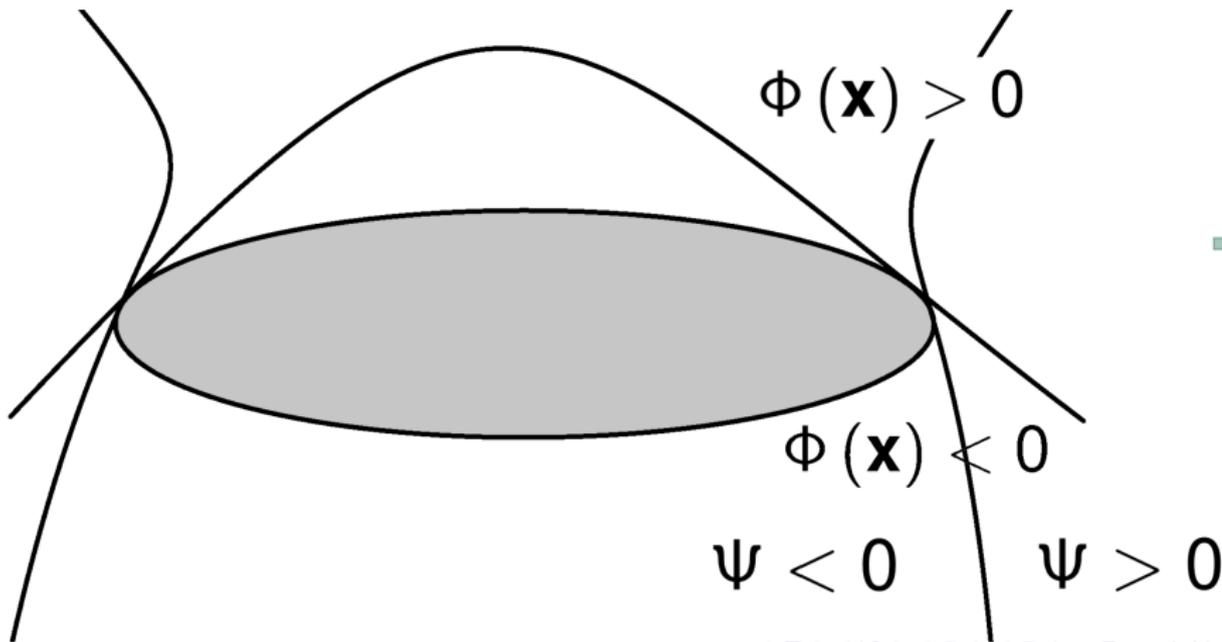
$$d\mathbf{S} = d^3x \delta(\Phi[\mathbf{x}]) \nabla\Phi \quad (23)$$

Lo cual tiene sentido, porque efectivamente $\Phi = 0$ define el borde de V , y $\nabla\Phi$ tiene la dirección y sentido de la normal *exterior* a la superficie. De hecho, supongamos que localmente podemos definir un sistema de coordenadas tales que (x, y) son coordenadas sobre la superficie y Φ depende sólo de z , con la superficie en $z = 0$. Entonces

$$d\mathbf{S} = dx dy dz \frac{\delta(z)}{\Phi'(0)} \Phi'(0) \mathbf{K} \approx dx dy \mathbf{K} \quad (24)$$

(no hay problemas de signos porque $\Phi' > 0$)

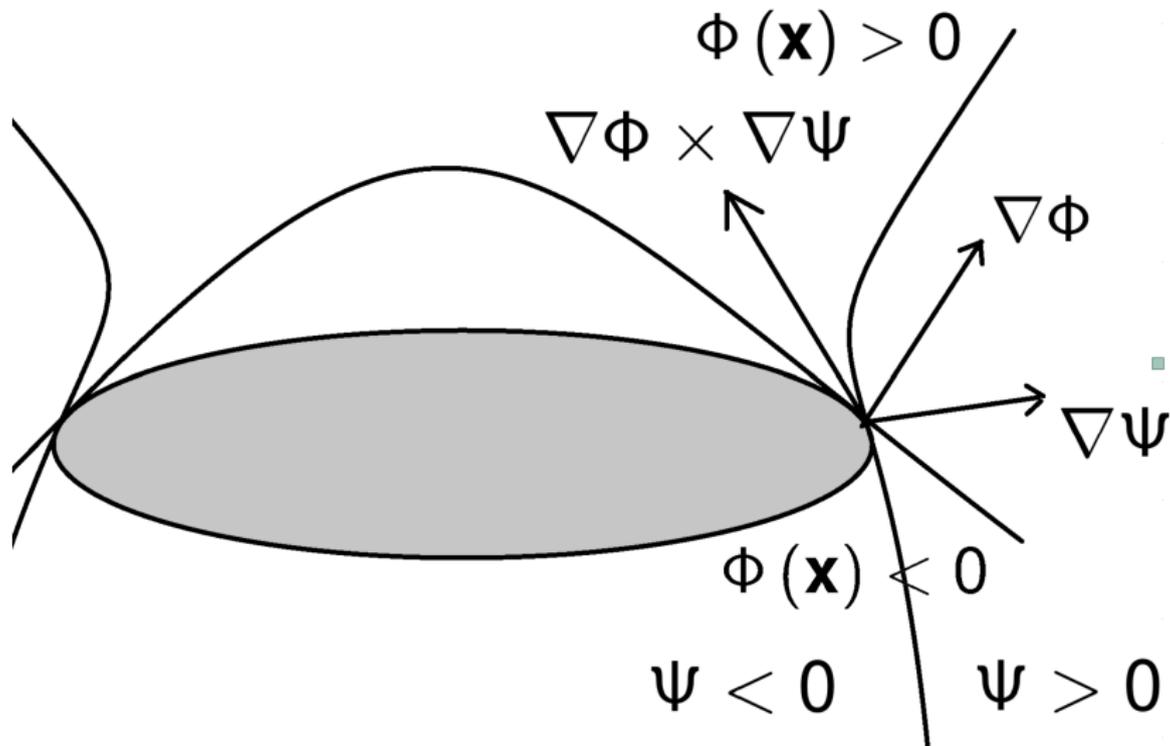
Teorema de Stokes Ahora tenemos que definir el flujo del rotor de un vector a través de una superficie *orientable* cuyo borde es una curva dada. Entonces necesitamos dos funciones, una función Φ que es negativa “abajo” de la superficie y positiva “arriba”, y una función Ψ que es negativa “adentro” de la curva y positiva “afuera”.



El flujo del rotor, según nuestra definición previa, es

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{A} &= \int d^3x \delta(\Phi) \theta(-\Psi) \nabla\Phi \cdot \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \int d^3x \delta(\Phi) \theta(-\Psi) \partial_i\Phi \epsilon^{ijk} \partial_j A_k \\ &= \int d^3x \delta(\Phi) \delta(\Psi) \epsilon^{kij} \partial_i\Phi \partial_j\Psi A_k \\ &= \int d^3x \delta(\Phi) \delta(\Psi) (\nabla\Phi \times \nabla\Psi) \cdot \mathbf{A} \\ &= \oint_{\delta S} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \tag{25}$$

Efectivamente, la curva δS es la intersección de las superficies $\Phi = 0$ y $\Psi = 0$, y como $\nabla\Phi \times \nabla\Psi$ es tangente a ambas, también es tangente a la intersección.



Teorema de los residuos Consideramos el plano complejo. La transformación

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= x + iy \\ \mathbf{z}^* &= x - iy\end{aligned}\tag{26}$$

y su inversa

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}(\mathbf{z} + \mathbf{z}^*) \\ y &= \frac{1}{2i}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^*)\end{aligned}\tag{27}$$

Implican

$$\begin{aligned}\partial_x &= \partial_{\mathbf{z}} + \partial_{\mathbf{z}^*} \\ \partial_y &= i[\partial_{\mathbf{z}} - \partial_{\mathbf{z}^*}]\end{aligned}\tag{28}$$

y también

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{z}} &= \frac{1}{2}[\partial_x - i\partial_y] \\ \partial_{\mathbf{z}^*} &= \frac{1}{2}[\partial_x + i\partial_y]\end{aligned}\tag{29}$$

Una función $\mathbf{f}[\mathbf{z}]$ es analítica en \mathbf{z}_0 si admite un desarrollo de Taylor allí. Por ser función sólo de \mathbf{z} (y no de ambas \mathbf{z} y \mathbf{z}^*) satisface

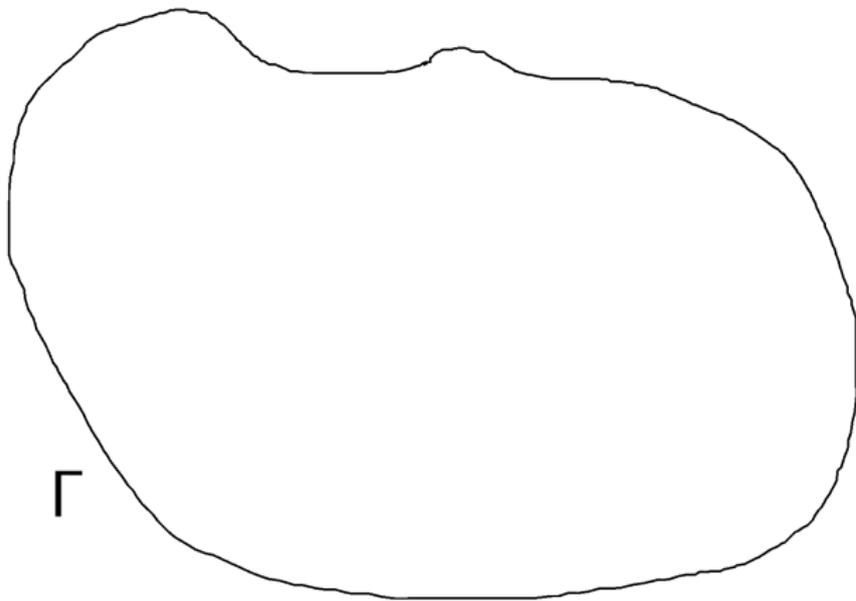
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}^*} = 0 \quad (30)$$

Si separamos las partes real e imaginaria $\mathbf{f} = f + ig$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Estas son las *identidades de Cauchy-Riemann*.

Ahora consideramos la integral de f a lo largo de una curva Γ en el plano complejo.



Separando partes real e imaginaria

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} dz \mathbf{f} &= \oint_{\Gamma} (dx f - dy g) + i \oint_{\Gamma} (dx g + dy f) \\ &= \oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} + i \oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}\quad (32)$$

Donde los vectores $\mathbf{u} = (f, -g, 0)$ y $\mathbf{v} = (g, f, 0)$. Si pensamos al plano complejo como el plano $z = 0$ en \mathbf{R}^3 , entonces

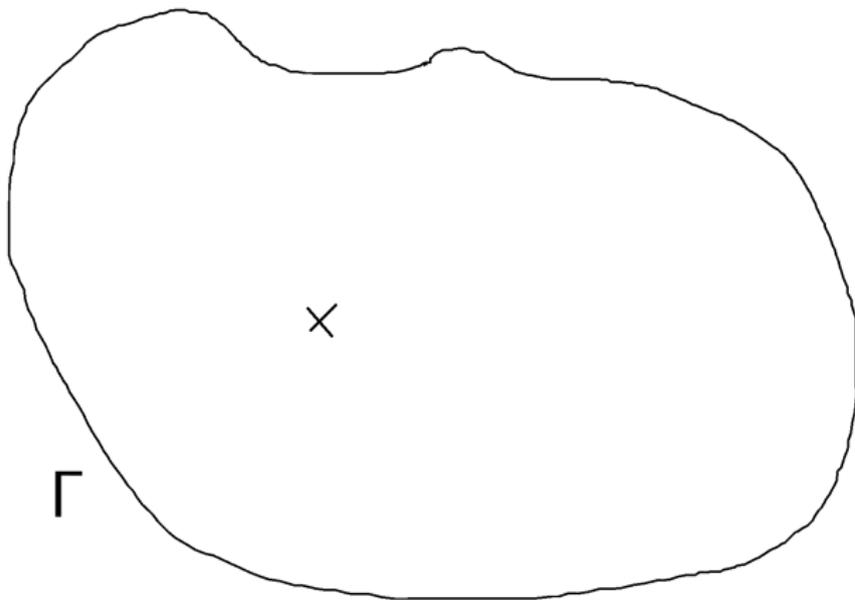
$$\oint_{\Gamma} dz \mathbf{f} = \int_A dx dy (\nabla \times \mathbf{u})_z + i \int_A dx dy (\nabla \times \mathbf{v})_z \quad (33)$$

donde A es el área en el interior de Γ . Pero

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{u})_z &= -g_{,x} - f_{,y} = 0 \\ (\nabla \times \mathbf{v})_z &= f_{,x} - g_{,y} = 0\end{aligned}\quad (34)$$

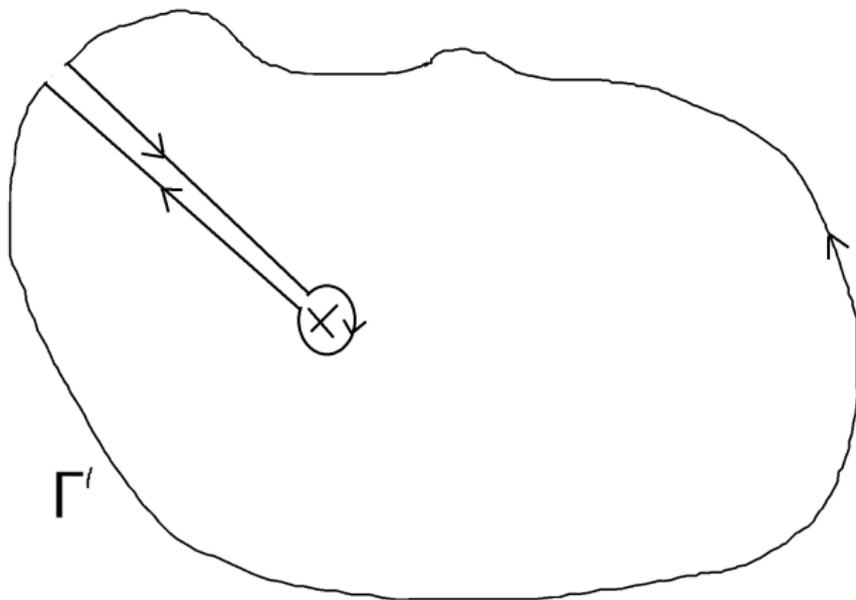
por las identidades de Riemann (31). *La integral de una función analítica en una curva cerrada se anula idénticamente.*

Supongamos ahora que en interior de Γ hay un punto \mathbf{z}_0 donde \mathbf{f} no es analítica, pero $(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^M \mathbf{f}$ sí para M lo suficientemente grande.



Consideramos la curva γ que es un círculo de radio ϵ alrededor de \mathbf{z}_0 , y la curva $\Gamma' = \Gamma - \gamma$. Entonces

$$\oint_{\Gamma} dz \mathbf{f} = \oint_{\Gamma'} dz \mathbf{f} + \oint_{\gamma} dz \mathbf{f} = \oint_{\gamma} dz \mathbf{f} \quad (35)$$



La integral sobre γ es calculada explícitamente mediante el *desarrollo de Laurent*

$$\mathbf{f}[\mathbf{z}] = \sum_{k=-M}^{\infty} a_k (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^k \quad (36)$$

Usando que en γ , $\mathbf{z} - \mathbf{z}_0 = \epsilon e^{i\theta}$ y $d\mathbf{z} = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} d\mathbf{z} \mathbf{f} &= \sum_{k=-M}^{\infty} a_k i \epsilon^{k+1} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(k+1)\theta} \\ &= 2\pi i a_{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

Este es el *teorema de los residuos*.

Transformación de Fourier

Consideremos la fórmula

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \quad (38)$$

Entonces para una función cualquiera encontramos

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int d^3x' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f_{\mathbf{k}} \\ f_{\mathbf{k}} &= \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} f(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (39)$$

y vale que

$$\int d^3x |f(\mathbf{x})|^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |f_{\mathbf{k}}|^2 \quad (40)$$

$f_{\mathbf{k}} = 0$ para todo \mathbf{k} si y sólo si $f(\mathbf{x}) = 0$ para todo \mathbf{x} .

En una base cartesiana, un vector $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} A_{\mathbf{k}}^i \mathbf{e}_i \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}\end{aligned}\quad (41)$$

En particular

$$\partial_j \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (ik_j) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}\quad (42)$$

Aplicando esta fórmula, encontramos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \\ \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \\ \Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (-k^2) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}\end{aligned}\quad (43)$$



Figura: Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) 

Aplicación: Si la divergencia de \mathbf{A} es cero, \mathbf{A} es un rotor.
Como $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0$ para todo \mathbf{k} , usando la fórmula BACA MENOS CABALLO encontramos que

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{A}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) = k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \quad (44)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{k^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{A}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) = \nabla \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B} &= (-i) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{k^2} (\mathbf{A}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (45)$$

Incidentalmente, $\Delta \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Aplicación: Si el rotor de \mathbf{A} es cero, \mathbf{A} es un gradiente. Como $\mathbf{k} \times \mathbf{A}_k = 0$ para todo \mathbf{k} , usando la fórmula BACAMENOS CABALLO encontramos que

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{A}_k \times \mathbf{k}) = 0 = k^2 \mathbf{A}_k - \mathbf{k} (\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{k}) \quad (46)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{k^2} \mathbf{k} (\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{k}) = \nabla \phi \\ \phi &= (-i) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{k^2} (\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (47)$$

Incidentalmente, $\Delta \phi = \nabla \cdot \mathbf{A}$.

Aplicación: Todo campo vectorial es un campo de gradientes más un campo de rotadores.

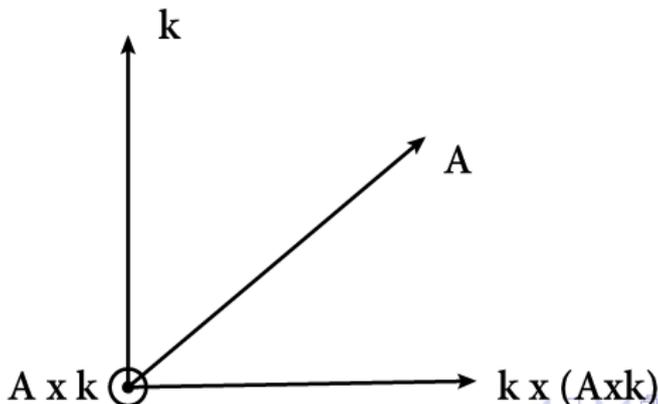
Usando nuevamente BACA MENOS CABALLO

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{A}_k \times \mathbf{k}) = k^2 \mathbf{A}_k - \mathbf{k} (\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{k}) \quad (48)$$

$$\mathbf{A}_k = \nabla \times \mathbf{B} + \nabla \phi$$

$$\mathbf{B} = (-i) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{1}{k^2} (\mathbf{A}_k \times \mathbf{k})$$

$$\phi = (-i) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{1}{k^2} (\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{k}) \quad (49)$$



Coordenadas Curvilíneas (ortogonales)

En principio, cualquier transformación biunívoca $(x, y, z) \leftrightarrow (\xi, \eta, \zeta)$ define un sistema de coordenadas curvilíneas. A nosotros nos interesan sistemas de coordenadas en que los gradientes de (ξ, η, ζ) son mutuamente ortogonales, y forman una base derecha en cada punto. Definiendo los versores

$$\mathbf{e}^\alpha = h_{(\alpha)} \nabla \xi^\alpha \quad (50)$$

($\alpha = 1, 2, 3$, SIN SUMAR SOBRE α) o sea que $h_{(\alpha)} = 1/|\nabla \xi^\alpha|$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta &= \delta^{\alpha\beta} \\ \mathbf{e}^\alpha \cdot (\mathbf{e}^\beta \times \mathbf{e}^\gamma) &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \end{aligned} \quad (51)$$

Vectores covariantes Invertiendo la fórmula

$$\frac{1}{h_{(\alpha)}} \mathbf{e}^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} \mathbf{e}^i \quad (52)$$

obtenemos

$$\mathbf{e}^i = \frac{1}{h_{(\alpha)}} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{e}^\alpha \quad (53)$$

Si $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}^i$ es un vector covariante, entonces

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}^i = \frac{1}{h_{(\alpha)}} A_i \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{e}^\alpha \equiv A_\alpha \mathbf{e}^\alpha \quad (54)$$

o sea

$$A_\alpha = \frac{1}{h_{(\alpha)}} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} A_i \quad (55)$$

Contrayendo la relación de ortogonalidad

$$\delta^{ij} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^j} = \frac{1}{[h_{(\alpha)}]^2} \delta^{\alpha\beta} \quad (56)$$

con $\partial x^k / \partial \xi^\beta$ obtenemos

$$\delta^{ik} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} = \frac{1}{[h_{(\alpha)}]^2} \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^\beta} \quad (57)$$

Invirtiendo esta relación vemos que

$$\frac{\partial x^k}{\partial \xi^\alpha} = \delta^{kj} \delta_{\alpha\beta} [h_{(\alpha)}]^2 \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^j} \quad (58)$$

En particular

$$\delta^{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta} = [h_{(\alpha)}]^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (59)$$

Tensor métrico El elemento de arco se escribe como

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (60)$$

Desarrollando los diferenciales

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha \quad (61)$$

vemos que

$$ds^2 = \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (62)$$

donde $g_{\alpha\beta}$ es el *tensor métrico*

$$g_{\alpha\beta} = [h_{(\alpha)}]^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (63)$$

Lo cual nos permite leer las $h_{(\alpha)}$ directamente del elemento de arco.

Ejemplos

En coordenadas esféricas (r, θ, φ)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (64)$$

por lo tanto $h_{(r)} = 1$, $h_{(\theta)} = r$, y $h_{(\varphi)} = r \sin \theta$.

En coordenadas cilíndricas (z, r, φ)

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (65)$$

por lo tanto $h_{(z)} = h_{(r)} = 1$, y $h_{(\varphi)} = r$.

El elemento de volumen Por la regla para el cambio de variables

$$d^3x = Jd^3\xi \quad (66)$$

$$J = \det \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \quad (67)$$

pero entonces

$$J^{-1} = \det \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} = \nabla_{\xi^1} \cdot (\nabla_{\xi^2} \times \nabla_{\xi^3}) = \frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}h_{(3)}}$$
$$d^3x = h_{(1)}h_{(2)}h_{(3)}d^3\xi \quad (68)$$

En esféricas, $d^3x = r^2 \sin \theta drd\theta d\varphi$.

En cilíndricas, $d^3x = r dzdrd\varphi$.

El Gradiente

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \mathbf{e}^i = \frac{\partial\phi}{\partial\xi^\alpha} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^i} \mathbf{e}^i \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial\xi^\alpha} \nabla\xi^\alpha = \frac{1}{h_{(\alpha)}} \frac{\partial\phi}{\partial\xi^\alpha} \mathbf{e}^\alpha\end{aligned}\quad (69)$$

En esféricas,

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}\quad (70)$$

En cilíndricas,

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} + \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}\quad (71)$$

La Divergencia

Como la base \mathbf{e}^α es ortonormal, a cada vector covariante $\mathbf{A}_\alpha \mathbf{e}^\alpha$ le podemos asociar un vector contravariante con $\mathbf{A}^\alpha = \delta^{\alpha\beta} \mathbf{A}_\beta$.

Usando la relación conocida entre \mathbf{A}_α y las componentes cartesianas A_i , y la ecuación (59), encontramos que las componentes cartesianas contravariantes $A^i = \delta^{ij} A_j$ son

$$A^i = \frac{1}{h_{(\alpha)}} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} A^\alpha \quad (72)$$

por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_i A^i = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \frac{A^\alpha}{h_{(\alpha)}} + \frac{A^\alpha}{h_{(\alpha)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \quad (73)$$

Ahora

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\beta} \quad (74)$$

Para cualquier matriz \mathbf{g} , si $g = \det \mathbf{g}$, $d \ln g = \text{tr } \mathbf{g}^{-1} d\mathbf{g}$. Usando esta propiedad

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \ln J \quad (75)$$

donde $J = h_{(1)} h_{(2)} h_{(3)}$. De este modo

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{J} \partial_\alpha \frac{J}{h_{(\alpha)}} A^\alpha \quad (76)$$

En particular

$$\Delta \phi = \frac{1}{J} \partial_\alpha \frac{J}{[h_{(\alpha)}]^2} \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^\beta} \quad (77)$$

El rotor

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \epsilon^{ijk} (\partial_j \mathbf{A}_k) \mathbf{e}_i \\ &= \epsilon^{ijk} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left[h_{(\beta)} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k} \mathbf{A}_\beta \right] h_{(\gamma)} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^i} \mathbf{e}_\gamma \\ &= h_{(\gamma)} \epsilon^{ijk} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} [h_{(\beta)} \mathbf{A}_\beta] \mathbf{e}_\gamma \\ &+ h_{(\gamma)} h_{(\beta)} \mathbf{A}_\beta \epsilon^{ijk} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^i} \mathbf{e}_\gamma \\ &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{h_{(\gamma)}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} [h_{(\beta)} \mathbf{A}_\beta] \mathbf{e}_\gamma\end{aligned}\tag{78}$$

LA FUNCION DE GREEN DE LA ECUACION DE ONDAS

Como la ecuación de ondas es lineal, la solución de

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A = f \quad (79)$$

se puede escribir como

$$A[\mathbf{x}, t] = \int dt' \int d^3x' G[\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'] f[\mathbf{x}', t'] \quad (80)$$

donde G es la solución a

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \quad (81)$$

G representa la evolución de una perturbación a los campos iniciada en \mathbf{x}' en el instante t' .



- ▶ Si el espacio es homogéneo, $G = G[\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t']$.
- ▶ Por causalidad, $G = 0$ si $t \leq t'$.
- ▶ Como las perturbaciones se propagan con velocidad c ,
 $G = 0$ si $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > c(t - t')$

La condición $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = c(t - t')$ define el cono (futuro) de la luz.

Solución explícita

a) Transformando Fourier en \mathbf{x} .

b) Transformando Fourier en t .

c) Transformando Fourier en \mathbf{x} y t .

a) Transformando Fourier en \mathbf{x} .
Empezamos con

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \quad (82)$$

y transformamos Fourier

$$G[\mathbf{x}, t] = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} G_{\mathbf{k}}[t] \quad (83)$$

$G_{\mathbf{k}}[t]$ obedece la ecuación

$$\frac{d^2}{dt^2} G_{\mathbf{k}}[t] + \omega_k^2 G_{\mathbf{k}}[t] = c^2 \delta(t) \quad (84)$$

$$\omega_k^2 = c^2 k^2$$

La solución que se anula idénticamente para $t \leq 0$ es

$$G_{\mathbf{k}}[t] = c^2 \frac{\sin(\omega_{\mathbf{k}} t)}{\omega_{\mathbf{k}}} \theta(t) \quad (85)$$

de manera que

$$G[\mathbf{x}, t] = c^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{\sin(\omega_{\mathbf{k}} t)}{\omega_{\mathbf{k}}} \theta(t) \quad (86)$$

Escribimos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = kr \cos \theta$

$$G[\mathbf{x}, t] = \frac{c}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k dk \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ikr \cos \theta} \sin(ckt) \theta(t) \quad (87)$$

Usando la integral

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ikr \cos \theta} = 2 \frac{\sin(kr)}{kr} \quad (88)$$

integramos sobre ángulos

$$G[\mathbf{x}, t] = \frac{c}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk [\cos(k(r - ct)) - \cos(k(r + ct))] \theta(t) \quad (89)$$

Finalmente usamos

$$\int_0^\infty dk \cos(kr) = \pi \delta(r) \quad (90)$$

(que sale de tomar la parte real de la representación de la δ como transformada de Fourier, recordar ec. (38)) y obtenemos

$$G[\mathbf{x}, t] = \frac{c}{4\pi r} \delta(r - ct) \theta(t) \quad (91)$$

b) Transformando Fourier en t .
Empezamos nuevamente con

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \quad (92)$$

y transformamos Fourier en t

$$G[\mathbf{x}, t] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} e^{-i\omega t} G_\omega[\mathbf{x}] \quad (93)$$

$G_\omega[\mathbf{x}]$ obedece la ecuación

$$\Delta G_\omega[\mathbf{x}] + \frac{\omega^2}{c^2} G_\omega[\mathbf{x}] = -\delta(\mathbf{x}) \quad (94)$$

Buscamos una solución con simetría esférica

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} G_\omega[r] + \frac{\omega^2}{c^2} G_\omega[r] = -\frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \quad (95)$$

Probamos con

$$G_\omega [r] = \frac{g_\omega [r]}{r} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} G'_\omega &= \frac{g'_\omega [r]}{r} - \frac{g_\omega [r]}{r^2} \\ r^2 G'_\omega &= r g'_\omega [r] - g_\omega [r] \\ (r^2 G'_\omega)' &= r g''_\omega [r] \\ \frac{1}{r^2} (r^2 G'_\omega)' &= \frac{1}{r} g''_\omega [r] \end{aligned} \quad (97)$$

$$g''_\omega [r] + \frac{\omega^2}{c^2} g_\omega [r] = -\frac{\delta(r)}{4\pi r} \quad (98)$$

Si $r \neq 0$

$$g_\omega [r] = A_\omega e^{i\omega r/c} + B_\omega e^{-i\omega r/c} \quad (99)$$

Pero entonces

$$G[\mathbf{x}, t] = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \left[A_\omega e^{i\omega(r/c-t)} + B_\omega e^{-i\omega(r/c+t)} \right] \quad (100)$$

Vemos que los términos con A_ω describen ondas salientes, mientras que los términos con B_ω describen ondas entrantes. La solución que estamos buscando debe obedecer la *condición de Sommerfeld* $B_\omega = 0$.



Figura: Arnold Sommerfeld (1868-1951)

Para encontrar los A_ω , pedimos que

$$\int_{0^-}^{\epsilon} dr r \left[g_\omega'' [r] + \frac{\omega^2}{c^2} g_\omega [r] \right] = \frac{-1}{4\pi} \quad (101)$$

Integrando por partes la derivada segunda, descartando términos que van a cero con ϵ , y asumiendo que $g_\omega = 0$ para $r < 0$ obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\omega [\epsilon] = A_\omega = \frac{1}{4\pi} \quad (102)$$

Finalmente recuperamos la solución ec. (91)

c) Transformando Fourier en \mathbf{x} y t .
Empezamos nuevamente con

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \quad (103)$$

pero esta vez transformamos Fourier en \mathbf{x} y t

$$G[\mathbf{x}, t] = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t]} G_{\mathbf{k}, \omega} \quad (104)$$

El problema se reduce a una ecuación algebraica

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right] G_{\mathbf{k}, \omega} = -1 \quad (105)$$

Si simplemente dividiéramos por $\omega^2/c^2 - k^2$, $G_{\mathbf{k}, \omega}$ tendría singularidades sobre el eje real, en $\omega = \pm ck$.

Pero eso no puede ser, porque *si la función $f(t)$ se anula idénticamente para $t < 0$, entonces las singularidades de su transformada deben estar en el semiplano inferior*

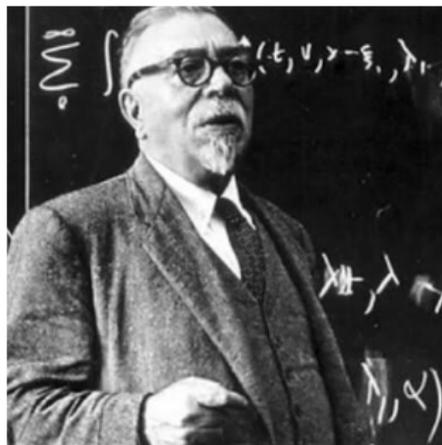


Figura: Norbert Wiener
(1894-1964)



Figura: Raymond E. A. C. Paley
(1907 - 1933)

Consideremos la fórmula de Fourier

$$f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f[\omega] \quad (106)$$

como la integral de una función compleja $\mathbf{F}[\mathbf{z}] = e^{-izt} f[\mathbf{z}]$ sobre una curva Γ que coincide con el eje real.

La idea es “completar” la curva agregando un arco que nos permita convertirla en una curva cerrada y aplicar el teorema de los residuos, pero de tal manera que la integral sobre el arco suplementario se anule. Si $t < 0$, podemos lograrlo agregando un arco de radio infinito en el semiplano superior, porque allí $\mathbf{z} = \omega + i\sigma$ con $\sigma > 0$, y $e^{-izt} = e^{i\omega|t|} e^{-\sigma|t|}$ converge bellamente. Pero como queremos que $f(t)$ se anule para $t < 0$, nuestro contorno “mejorado” no debe atrapar ninguna singularidad de $\mathbf{F}[\mathbf{z}]$

Para lograr que $G_{\mathbf{k},\omega}$ no tenga singularidades en el semiplano superior, deformamos la ecuación (105) en

$$\left[\frac{(\omega + i\epsilon)^2}{c^2} - k^2 \right] G_{\mathbf{k},\omega} = -1 \quad (107)$$

Entonces

$$G_{\mathbf{k},\omega} = \frac{-c^2}{\left[(\omega + i\epsilon)^2 - c^2 k^2 \right]} \quad (108)$$

posee singularidades en $\omega = \pm ck - i\epsilon$, y

$$G[\mathbf{x}, t] = (-c^2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t]}}{\left[(\omega + i\epsilon)^2 - c^2 k^2 \right]} \quad (109)$$

Para $t > 0$, completamos el camino de integración con un arco en el semiplano inferior.

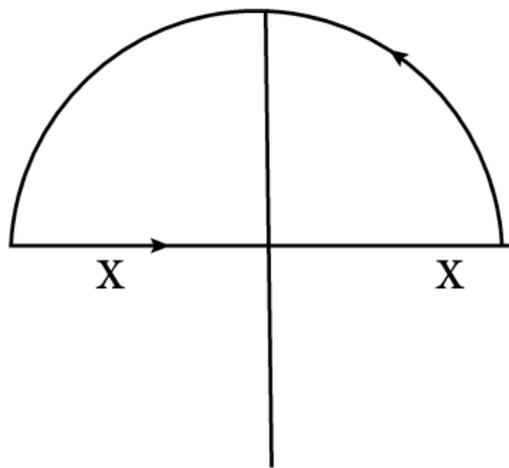


Figura: $t < 0$

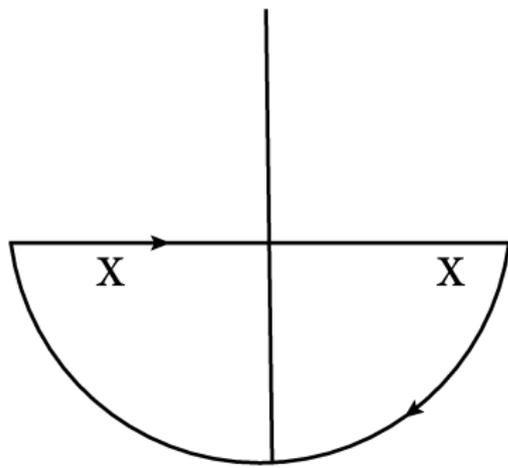


Figura: $t > 0$

Para calcular la integral, reescribimos la ec. (109) como
($\omega_k = ck$)

$$G[\mathbf{x}, t] = (-c^2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega_k} \left[\frac{1}{(\omega + i\epsilon - \omega_k)} - \frac{1}{(\omega + i\epsilon + \omega_k)} \right] \quad (110)$$

La integral en la segunda línea resulta

$$\frac{-i}{2\omega_k} \left[e^{-i\omega_k t} - e^{+i\omega_k t} \right] = -\frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k} \quad (111)$$

con lo cual la representación (110) se reduce a la ecuación (86).

La clase que viene nos toca el capítulo 7 del Landau de medios continuos.