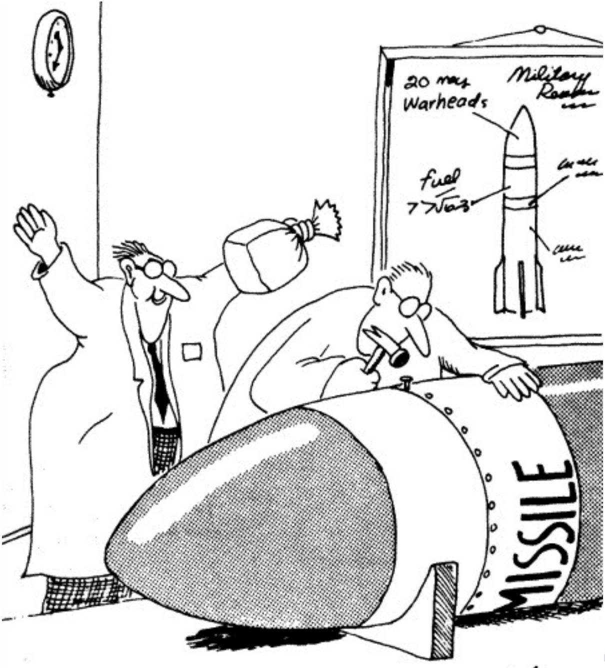
APROXIMACION CUASIESTACIONARIA



En esta clase hablaremos de una serie de problemas en los que los efectos de radiación electromagnética no son significativos

- Ley de Ohm
- Penetración del campo magnético en un conductor
- Invariancia de Galileo de las ecuaciones de Maxwell

LEY DE OHM

Bueno, no ése Ohm

En un conductor, bajo un campo eléctrico constante, se genera una densidad de corriente

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \qquad (1)$$

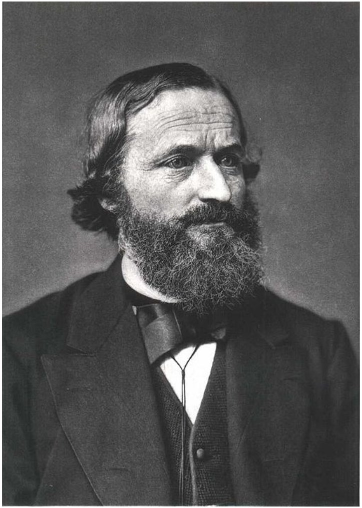
σ tiene unidades de frecuencia.

Georg Simon Ohm (1789-1854)

El campo eléctrico entrega una potencia $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ al medio, que se disipa en forma de calor, y genera una variación de entropía $dS = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}/T$. Por lo tanto, $dS \geq 0$ requiere $\sigma \geq 0$.

Como $\partial\rho/\partial t = 0$, debe ser $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$.

La distribución de campos y corrientes es la que minimiza el calor disipado



Gustav Robert Kirchhoff
(1824-1887)

El calor total disipado es

$$Q = \int d^3x \, \sigma E^2 \qquad (2)$$

Como el campo es estacionario, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi \\ Q &= \int d^3x \, \sigma \, (\nabla\phi)^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

Extremando respecto de ϕ obtenemos

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla\phi) = \nabla \mathbf{j} = 0 \qquad (4)$$

Penetración del campo magnético en un conductor

Si despreciamos la corriente de desplazamiento, las ecuaciones de Maxwell en un conductor son

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E} \end{aligned} \tag{5}$$

La segunda ecuación implica que $\nabla \cdot \mathbf{j} = \sigma \nabla \mathbf{E} = 0$. Eliminando el campo eléctrico obtenemos

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{\mu c^2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{6}$$

Si $\mu = 1$, **H** es continuo en la frontera del conductor.

Adoptamos la notación en la que todas las cantidades varían en el tiempo con frecuencia ω.

Entonces, si hablamos de un campo “**H**” queremos decir que el campo físico es

$$\mathrm{Re}\ \left[\mathbf{H}e^{-i\omega t}\right] = |\mathbf{H}| \cos\left(\omega t + \phi\right) \tag{7}$$

El valor medio de un operador bilineal, por ejemplo H^2, es

$$\bar{H}^2 = (1/2)\,|\mathbf{H}|^2 = (1/2)\,\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} \tag{8}$$

Supongamos que un conductor ocupa el semiespacio $x \geq 0$, y que en la frontera $x = 0$, la amplitud $\mathbf{H}$ es independiente de y y z, y paralela a la superficie. Entonces, dentro del conductor

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} = \frac{-4\pi i \sigma \omega}{c^2} \mathbf{H} \tag{9}$$

con solución

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{H}_0 e^{-(1-i)\kappa x} \tag{10}$$

($(1 - i)^2 = -2i$, $(1 - i) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$), donde

$$\kappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega}{c^2}} \tag{11}$$

El campo penetra en el conductor hasta una distancia $\delta = 1/\kappa$ del borde

$$\delta = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega}} \tag{12}$$

Debido a la presencia de campo magnético, en el conductor se generan *corrientes de Foucault*

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{c}{4\pi}\nabla \times \mathbf{H} \\ &= -(1-i)\,\frac{c\kappa}{4\pi}\mathbf{l} \times \mathbf{H} \quad (13) \end{aligned}$$

y por lo tanto un campo eléctrico

$$\mathbf{E} = -(1-i)\,\frac{c\kappa}{4\pi\sigma}\mathbf{l} \times \mathbf{H} \quad (14)$$

Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868)

El calor medio disipado por unidad de volumen es

$$\bar{q} = \frac{1}{2}\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j} = \frac{c^2\kappa^2}{(4\pi)^2\,\sigma}\left|H_0^2\right| e^{-2\kappa x} \tag{15}$$

el calor medio disipado por unidad de área es

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \int_0^\infty dx\ \bar{q} \\ &= \frac{c^2\kappa}{2\,(4\pi)^2\,\sigma}\left|H_0^2\right| \\ &= \frac{c}{2\,(4\pi)}\ \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}\big|_{x=0} \qquad (16)\end{aligned}$$

Distribución de corrientes en un conductor

Si en vez de eliminar **E** eliminamos **H** de las ecuaciones de Maxwell obtenemos

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma}{\mu c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{17}$$

o en notación compleja

$$\Delta\mathbf{E} = -i\omega\frac{4\pi\sigma}{\mu c^2}\mathbf{E} \tag{18}$$

Consideramos un conductor cilíndrico, con **E** paralelo al eje del cilindro. Como $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, **E** es independiente de z. Si también es independiente de φ, entonces (ponemos $\mu = 1$)

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\mathbf{E} + (1+i)^2\,\kappa^2\mathbf{E} = 0 \tag{19}$$

La solución es

$$\mathbf{E} = J_0\left[(1+i)\,\kappa r\right]\mathbf{E}_0 \tag{20}$$

Cuando $\kappa r \gg 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &\approx \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{(1+i)\,\kappa r}}\cos\left[e^{i\pi/4}\left(\sqrt{2}\kappa r - 1\right)\right]\\ &\to \frac{\mathbf{E}_0}{2\sqrt{(1+i)\,\kappa r}}e^{(1-i)\kappa r}e^{-(1-i)/\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{21}$$

Por lo tanto, la corriente se concentra en la superficie del conductor.

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS Y LA TRANSFORMACIÓN DE GALILEO[1]

[1] M. Le Bellac y J-M. Lévy-Leblond, *Galilean Electromagnetism*, N. Cim.14, N2, 217 (1973)

En la segunda parte del curso vamos a ver que las ecuaciones de Maxwell no son invariantes frente a las *transformaciones de Galileo*, sino frente a las *transformaciones de Lorentz*.

Sin embargo, como las segundas convergen a las primeras en el límite de bajas velocidades, debiera ser posible construír una teoría electromagnética *invariante de Galileo*, al menos en ese límite.

Una transformación de Galileo traduce las observaciones de un observador inercial S, que mide coordenadas $\mathbf{x}$ y tiempos t, en las de un segundo observador inercial S', que se mueve con velocidad uniforme $\mathbf{V}$ respecto de S, y coincide con él en $t = 0$. S' mide coordenadas $\mathbf{x}'$ y tiempos t' dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{V}t \\ t' &= t \end{aligned} \tag{22}$$

Se deduce la ley de transformación de velocidades y aceleraciones

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{V} \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{a} \end{aligned} \tag{23}$$

Como ambos observadores aplican las leyes de Newton, bajo la hipótesis de que las masas son invariantes, también lo son las fuerzas.

Al igual que las masas, asumimos que las cargas son invariantes. La densidad de carga se puede escribir como

$$\rho\left(\mathbf{x},t\right)=\sum_{\alpha}e_{\alpha}\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\alpha}\left(t\right)\right) \tag{24}$$

Como $\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\alpha}\left(t\right)$ es invariante, encontramos que

$$\rho'\left(\mathbf{x}',t'\right)=\rho\left(\mathbf{x},t\right) \tag{25}$$

Por supuesto, más adelante veremos que esta identidad es cierta hasta términos del orden de V^2/c^2.

La densidad de corriente se puede analizar de una manera similar

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}(t)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}(t)) \tag{26}$$

donde $\mathbf{v}_{\alpha}(t) = \dot{\mathbf{x}}_{\alpha}(t)$

$$\mathbf{j}'\left(\mathbf{x}', t'\right) = \mathbf{j}(\mathbf{x},t) - \mathbf{V}\rho(\mathbf{x},t) \tag{27}$$

Para chequear que la ley de conservación de la carga es invariante, observamos que para una función cualquiera $f(\mathbf{x}, t)$ que se transforma en $f'(\mathbf{x}', t')$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f'}{\partial x'^j}\right|_{t'} &= \left.\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\right|_t \left.\frac{\partial f'}{\partial x^k}\right|_t \\
&= \left.\frac{\partial f'}{\partial x^j}\right|_t
\end{aligned} \tag{28}$$

pero

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f'}{\partial t'}\right|_{\mathbf{x}'} &= \left.\frac{\partial f'}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + \left.\frac{\partial x^k}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}'} \left.\frac{\partial f'}{\partial x^k}\right|_t \\
&= \left.\frac{\partial f'}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) f'
\end{aligned} \tag{29}$$

Entonces

$$\nabla' \cdot \mathbf{j}' = \nabla \cdot \mathbf{j} - (\mathbf{V} \cdot \nabla)\,\rho \tag{30}$$

y

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\,\rho \tag{31}$$

por lo cual efectivamente la carga se conserva en ambos sistemas de referencia.

Debido a la invariancia de fuerzas y de cargas, debemos obtener

$$\mathbf{E}' + \frac{1}{c}\mathbf{v}' \times \mathbf{B}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{32}$$

Reemplazando $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \mathbf{B} + O(V/c) \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{B} \end{aligned} \tag{33}$$

Veamos qué pasa con la Ley de Gauss

$$
\begin{aligned}
\nabla' \cdot \mathbf{E}' &= \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c} \nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \\
&= \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\
&= \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j} \right) \\
&= \nabla \cdot \mathbf{E} + \ldots
\end{aligned} \tag{34}
$$

Los términos suprimidos están más allá de la precisión con la que estamos trabajando.

Veamos la Ley de Ampère-Maxwell.

Queremos mostrar que

$$
\begin{aligned}
0 = \nabla' \times \mathbf{B}' - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} + 4\pi \mathbf{j}'\right) &= \nabla \times \mathbf{B}' \\
- \quad \frac{1}{c}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\right)\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{B}\right) + 4\pi\left(\mathbf{j} - \mathbf{V}\rho\right)\right] & \quad (35)
\end{aligned}
$$

Si nos quedamos solamente con términos de orden V/c, se reduce a mostrar que

$$\nabla \times \left(\mathbf{B}' - \mathbf{B}\right) - \frac{1}{c}\left[\left(\mathbf{V} \cdot \nabla\right)\mathbf{E} - \mathbf{V}\left(\nabla \cdot \mathbf{E}\right)\right] = 0 \tag{36}$$

pero

$$\left(\mathbf{V} \cdot \nabla\right)\mathbf{E} - \mathbf{V}\left(\nabla \cdot \mathbf{E}\right) = -\nabla \times \left(\mathbf{V} \times \mathbf{E}\right) \tag{37}$$

de modo que

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{E} \tag{38}$$

es una ley admisible.

Efectivamente, si adoptamos esa ley de transformación para **B**, entonces

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \mathbf{B}' &= -\frac{1}{c}\nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{c}\mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \approx 0 \end{aligned} \tag{39}$$

dentro de nuestra aproximación.

En resumen, las leyes de transformación son (cfr. Landau II, sección 24)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{B} \\
\mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{E}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Como aplicación, consideremos una espira rígida moviéndose con velocidad **V** bajo campos **E** y **B**. En el referencial en reposo (instantáneo) de la espira,

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}' \tag{41}$$

Como la espira es macroscópicamente neutra,

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right) \tag{42}$$

que generaliza la Ley de Ohm para conductores en movimiento.

La f.e.m. total sobre la espira es

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{dl} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right) \tag{43}$$

Consideremos una superficie limitada por la espira y que se mueve con ella. El flujo de campo magnético es

$$\Phi = \int \mathbf{dS} \cdot \mathbf{B}\left[\mathbf{x}\left(t\right), t\right] \tag{44}$$

y por lo tanto

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int \mathbf{dS} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \left(\mathbf{V} \cdot \nabla\right) \mathbf{B}\right] \tag{45}$$

Usando la Ley de Faraday, vemos que el primer término es

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c \oint \mathbf{dl} \cdot \mathbf{E} \tag{46}$$

En el segundo término, escribimos

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{dS} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla)\, \mathbf{B} &= \int dS^i \, \left(V^j \partial_j\right) B_i \\
&= \int dS^i \, \left(V^j \partial_j B_i - V_i \partial_j B^j\right) \\
&= \int dS_i \, \partial_j \, \epsilon^{kji} \, (\mathbf{V} \times \mathbf{B})_k \\
&= -\int \mathbf{dS} \cdot \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \\
&= -\oint \mathbf{dl} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B})
\end{aligned} \tag{47}$$

de manera que

$$\mathcal{E} = \frac{-1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \tag{48}$$

SUERTE CON LA ENTREGA!

QUE DESCANSEN!