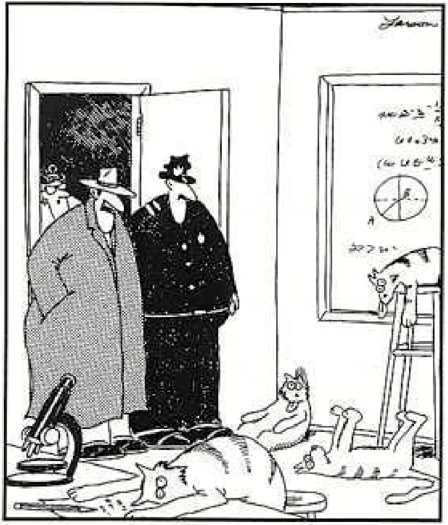
ONDAS PLANAS



"Notice all the computations, theoretical scribblings, and lab equipment, Norm. … Yes, curiosity killed these cats."

En esta clase

- Ondas Planas.
- Notación compleja.
- Momento Angular de la radiación.
- Polarización circular.
- Polarización parcial.
- Parámetros de Stokes.
- Fuori programma: Principio de Huygens y Teorema de extinción.

ONDAS PLANAS Consideramos las ecuaciones de Maxwell en un medio no dispersivo con constantes ϵ y μ y en ausencia de cargas y corrientes libres.

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &+ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\
\nabla \times \mathbf{B} &- \frac{\epsilon\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Una onda plana es una solución que depende de las coordenadas y del tiempo sólo a través de la combinación $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$. Si tomamos el eje z en la dirección de $\mathbf{k}$, entonces $E_z = B_z = 0$. Escribimos

$$\mathbf{E} = E_{0x} \cos\left(kz - \omega t + \varphi_x\right) \mathbf{I} + E_{0y} \cos\left(kz - \omega t + \varphi_y\right) \mathbf{J} \tag{2}$$

Entonces

$$\mathbf{B} = \frac{ck}{\omega}\left[-E_{0y} \cos\left(kz - \omega t + \varphi_y\right) \mathbf{I} + E_{0x} \cos\left(kzy - \omega t + \varphi_x\right) \mathbf{J}\right] \tag{3}$$

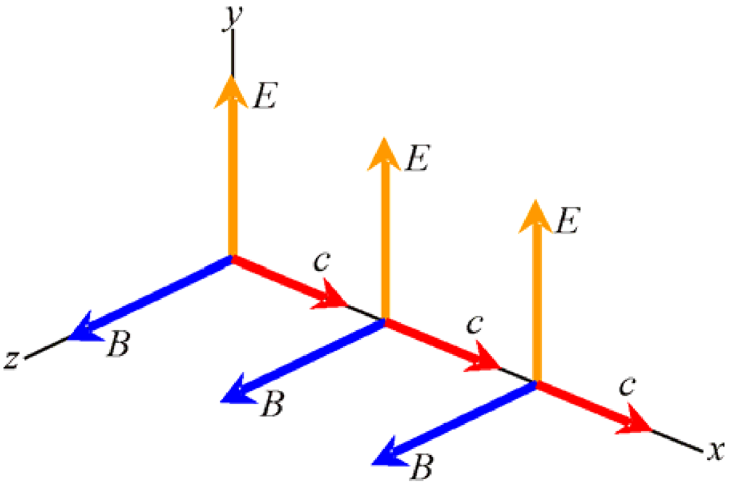
y

$$k^2 = \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \tag{4}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{B} = \sqrt{\epsilon\mu}\,\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \tag{5}$$

Los frentes de onda son los planos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} =$ constante y la velocidad de fase es $\bar{c} = c/\sqrt{\epsilon\mu}$. $\left(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{B}}\right)$ forman una terna derecha.



NOTACION COMPLEJA
En vez de

$$\mathbf{E} = E_{0x} \cos\left(kz - \omega t + \varphi_x\right) \mathbf{I} + E_{0y} \cos\left(kz - \omega t + \varphi_y\right) \mathbf{J} \tag{6}$$

con $E_{0x,y}$ reales, escribimos

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}\right\} \tag{7}$$

con

$$\mathbf{E}_0 = E_{0x} e^{i\varphi_x} \mathbf{I} + E_{0y} e^{i\varphi_y} \mathbf{J} \tag{8}$$

complejo. Análogamente

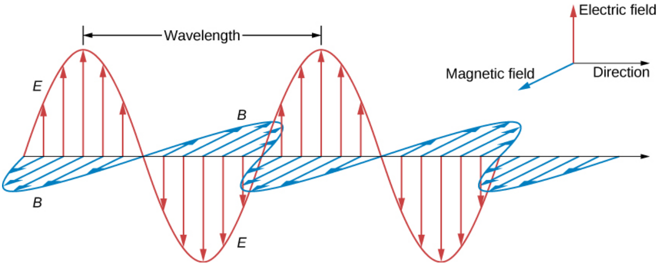
$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathrm{Re}\left\{\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}\right\} \\ \mathbf{B}_0 &= \sqrt{\epsilon\mu}\, \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 \end{aligned} \tag{9}$$

Sean $A = A_0 \cos(kz - \omega t + \varphi_A)$ y $B = B_0 \cos(kz - \omega t + \varphi_B)$ dos cantidades reales. En notación compleja escribimos $A = \mathrm{Re}\, \bar{A} e^{i(kz - \omega t)}$, con $\bar{A} = A_0 e^{i\varphi_A}$, y análogamente para B. Nos interesa el valor medio del producto AB, tomado sobre un período de la oscilación, $T = 2\pi\omega$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\langle AB \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt\; A_0 B_0 \cos(kz - \omega t + \varphi_A) \cos(kz - \omega t + \varphi_B) \\
&= \frac{1}{2} A_0 B_0 \cos(\varphi_B - \varphi_A) \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \bar{A}^* \bar{B} \right\} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

POLARIZACION DE LA LUZ

La fase relativa entre las componentes del campo eléctrico define el estado de polarización de la onda. Cuando la diferencia de fase $\varphi_y - \varphi_x = 0, \pi$, el campo eléctrico permanece siempre en un mismo plano. En este caso se habla de *luz linealmente polarizada*.



MOMENTO ANGULAR DE LA RADIACION

El momento angular total de un campo electromagnético es

$$\mathbf{J} = \int d^3x \, \mathbf{x} \times \mathbf{p} \tag{11}$$

donde $\mathbf{p} = (\epsilon/4\pi c)\,\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ es la densidad de impulso lineal. Usando que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ e integrando por partes, encontramos $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{\epsilon}{4\pi c} \int d^3x \, \mathbf{x} \times \left[E_j \nabla A^j \right] \\ \mathbf{S} &= \frac{\epsilon}{4\pi c} \int d^3x \, \mathbf{E} \times \mathbf{A} \end{aligned} \tag{12}$$

donde hemos usado que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. **L** es el *momento angular orbital* y **S** es el *momento angular de spin*[1]

[1] Konstantin Y. Bliokh y Franco Nori, Transverse and longitudinal angular momenta of light, ArXiv:1504.03113

Para una onda plana, la densidad de spin es

$$\mathbf{s} = \frac{\epsilon}{8\pi c}\mathrm{Re}\ [\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{A}_0] \tag{13}$$

En el gauge de Coulomb $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0 = 0$ y $\mathbf{E}_0 = (i\omega/c)\,\mathbf{A}_0$. Tomemos $\mathbf{k}$ en la dirección z, y

$$\mathbf{A}_0 = c_x\mathbf{I} + c_y\mathbf{J} \tag{14}$$

Entonces $\mathbf{s} = s\,\mathbf{K}$, y

$$s = (-i)\,\frac{\epsilon\omega}{8\pi c^2}\left(c_x^* c_y - c_y^* c_x\right) \tag{15}$$

Para $\mathbf{A}_0^* \cdot \mathbf{A}_0 = |c_x|^2 + |c_y|^2$ dado, el valor máximo y mínimo de s se obtiene cuando $c_y = \pm i c_x$, y vale

$$s = \pm \frac{\epsilon\omega}{8\pi c^2} \mathbf{A}_0^* \cdot \mathbf{A}_0 = \pm \frac{\rho_e}{\omega} \tag{16}$$

Para un único fotón, la densidad de energía es $\hbar\omega/V$, y el spin total es $S = \pm\hbar$.

Las ondas que realizan los valores extremos del spin se dicen circularmente polarizadas, derecha $(+)$ e izquierda $(-)$. Una onda circularmente polarizada se escribe como

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}^{(\pm)} \tag{17}$$

$$\mathbf{e}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{I} \pm i \mathbf{J} \right) \tag{18}$$

También $\mathbf{I} = \left(\mathbf{e}^{(+)} + \mathbf{e}^{(-)} \right) / \sqrt{2}$, $\mathbf{J} = (-i) \left(\mathbf{e}^{(+)} - \mathbf{e}^{(-)} \right) / \sqrt{2}$. Por lo tanto, una onda linealmente polarizada se puede pensar como la superposición de dos ondas circularmente polarizadas.

POLARIZACION PARCIAL

La polarización de una onda plana depende de la diferencia de fase entre las componentes x e y (con z la dirección de propagación), pero hay casos en que esta diferencia de fase es en sí una variable aleatoria. En este caso el estado de polarización se puede describir mediante la matriz

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \langle E_{0x}E_{0x}^{*}\rangle & \left\langle E_{0x}E_{0y}^{*}\right\rangle \\ \langle E_{0y}E_{0x}^{*}\rangle & \left\langle E_{0y}E_{0y}^{*}\right\rangle \end{pmatrix} \tag{19}$$

donde el promedio es sobre la fase relativa entre E_{0y} y E_{0x}. Vemos que

$$\mathrm{tr}\,\rho = \frac{1}{2}\left(\langle E_{0x}E_{0x}^{*}\rangle + \left\langle E_{0y}E_{0y}^{*}\right\rangle\right) = I \tag{20}$$

es la intensidad de la luz.

Supongamos que elegimos el origen de tiempos de tal manera que $E_{0x} = \bar{E}_{0x}$ sea real, y $E_{0y} = \bar{E}_{0y} e^{i\varphi}$. Además,

$$\left\langle e^{i\varphi} \right\rangle = c e^{i\bar{\varphi}} \tag{21}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz[2] debe ser $c \leq 1$.

[2] $|\langle A^* B \rangle|^2 \leq \left\langle |A|^2 \right\rangle \left\langle |B|^2 \right\rangle$

Por ejemplo, supongamos que φ tiene una distribución uniforme entre dos valores φ_1 y φ_2. Entonces

$$\left\langle e^{i\varphi} \right\rangle = \frac{1}{[\varphi_2 - \varphi_1]} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \; e^{i\varphi} = ce^{i\bar{\varphi}}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2}[\varphi_2 + \varphi_1] \quad ; \qquad c = \frac{2}{[\varphi_2 - \varphi_1]} \sin \frac{1}{2}[\varphi_2 - \varphi_1] \quad (22)$$

Como $\sin x \leq x$, $c \leq 1$; si $\varphi_2 - \varphi_1 \to 0$, entonces $c \to 1$, y si $\varphi_2 - \varphi_1 \to 2\pi$, entonces $c \to 0$.

Si φ tiene una distribución Gaussiana con media $\bar{\varphi}$ y varianza σ, entonces $c = e^{-\sigma^2/2}$

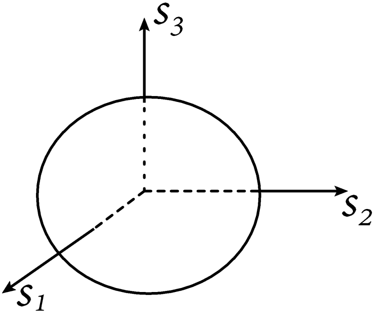
Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
\langle E_{0x} E_{0x}^{*} \rangle &= \bar{E}_{0x}^{2} \equiv I\left(1 + s_3\right) \\
\left\langle E_{0y} E_{0y}^{*} \right\rangle &= \bar{E}_{0y}^{2} \equiv I\left(1 - s_3\right) \\
\left\langle E_{0x} E_{0y}^{*} \right\rangle &= I\left(1 - s_3^2\right)^{1/2} c e^{-i\bar{\varphi}} \equiv I\left(s_1 - i s_2\right)
\end{aligned} \tag{23}$$

Se ve que $-1 \leq s_3 \leq 1$, y

$$s_1^2 + s_2^2 \leq 1 - s_3^2 \tag{24}$$

I y $s_{1,2,3}$ son los *parámetros de Stokes*.



En términos de los parámetros de Stokes

$$\rho = \frac{I}{2}\begin{pmatrix} (1+s_3) & (s_1 - is_2) \\ (s_1 + is_2) & (1-s_3) \end{pmatrix} = \frac{I}{2}\left[\mathbf{1} + \mathbf{s}\cdot\sigma\right] \qquad (25)$$

donde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ son las *matrices de Pauli*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,\sigma_i = 0 \quad &; \qquad \mathrm{tr}\,\sigma_i\sigma_j = 2\delta_{ij} \\ \left[\sigma_i, \sigma_j\right] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k \end{aligned} \qquad (27)$$

Entonces

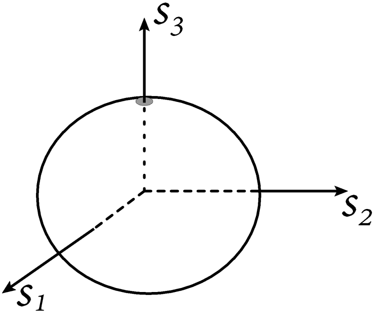
$$\frac{I^2}{2} \leq \mathrm{tr}\,\rho^2 = \frac{I^2}{2}\left[1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right] \leq I^2 \qquad (28)$$

Si $\operatorname{tr} \rho^2 = I^2/2$ ($s^2 = 0$), entonces ambas componentes del campo eléctrico tienen la misma amplitud y la fase está completamente indeterminada; en este caso hablamos de *luz natural*.

Si $\mathrm{tr}\,\rho^2 = I^2$ ($s^2 = 1$), entonces hablamos de luz totalmente polarizada.

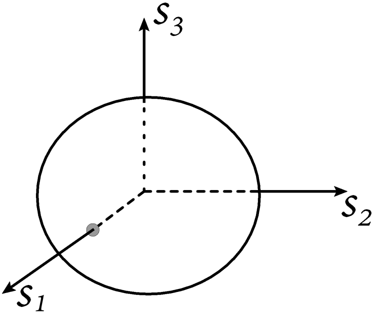
Por ejemplo, si $s_3 = 1$, $s_1 = s_2 = 0$, entonces el campo eléctrico sólo tiene componente x; la luz está linealmente polarizada.

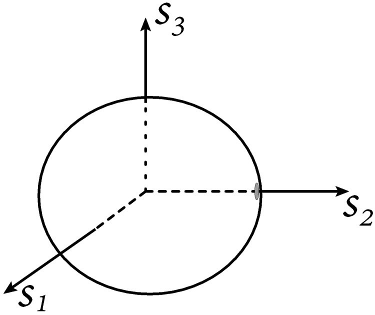
$$\mathbf{E} = \sqrt{2I}\,\mathbf{I} \tag{29}$$



Si $s_3 = 0$, las componentes x e y del campo tienen la misma amplitud. Si $s_1 = 1$ y $s_2 = 0$, además están en fase entre sí; la luz está linealmente polarizada en una dirección a 45^o respecto del eje x, $\mathbf{E} = \sqrt{I}\ (\mathbf{I} + \mathbf{J})$

Si $s_1 = 0$ pero $s_2 = 1$, la fase relativa es $\pi/2$ y la luz está circularmente polarizada, $\mathbf{E} = \sqrt{I}\ (\mathbf{I} + i\mathbf{J}) = \sqrt{2I}\,\mathbf{e}^{(+)}$





Para ver qué pasa en el caso general, observamos que la matriz ρ tiene dos autovalores $I\lambda_{\pm}$. Sean $\mathbf{e}_{\pm}$ los autovectores correspondientes, normalizados a $\mathbf{e}_{\pm}^{*} \cdot \mathbf{e}_{\pm} = 1$. Los autovalores son reales y positivos, porque

$$I\lambda_{\pm} = I\lambda_{\pm}\mathbf{e}_{\pm}^{*} \cdot \mathbf{e}_{\pm} = \mathbf{e}_{\pm}^{*}\, \rho\, \mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{2} \left\langle \left|\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_{\pm}\right|^{2} \right\rangle \tag{30}$$

Si $\lambda_{+} \neq \lambda_{-}$, entonces $\mathbf{e}_{-}^{*} \cdot \mathbf{e}_{+} = 0$, porque

$$I\lambda_{-}\mathbf{e}_{-}^{*} \cdot \mathbf{e}_{+} = \mathbf{e}_{-}^{*}\, \rho\, \mathbf{e}_{+} = I\lambda_{+}\mathbf{e}_{-}^{*} \cdot \mathbf{e}_{+} \tag{31}$$

En la base $(\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-)$

$$\rho = I \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \tag{32}$$

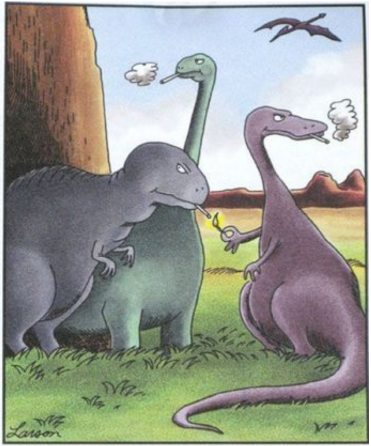
La condición $\operatorname{tr} \rho = I$ implica que $\lambda_+ + \lambda_- = 1$.

Entonces, como $\lambda_+^2 \leq \lambda_+$ y $\lambda_-^2 \leq \lambda_-$, debe ser $\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \leq 1$.

Pero si además $\operatorname{tr} \rho^2 = I^2$, entonces $\lambda_+^2 + \lambda_-^2 = 1$, y la única posibilidad es que uno de los autovalores (digamos λ_+) sea 1, y el otro cero.

Eso implica $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_- = 0$, y por lo tanto $\mathbf{E} = \sqrt{2I}\, \mathbf{e}_+$.

EL PRINCIPIO DE HUYGENS Y EL TEOREMA DE EXTINCION



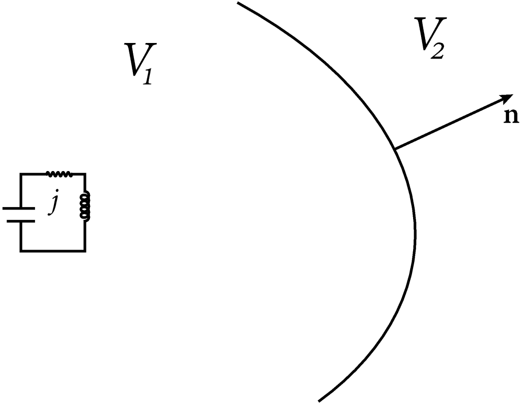
The real reason dinosaurs became extinct

Christiaan Huygens (1629-1695)

Para no complicarnos con el álgebra, vamos a considerar ondas escalares. Para la extensión al caso electromagnético, ver

- A. Ishimaru, *Electromagnetic wave propagation, radiation and scattering* (Prentice Hall, 1991).
- L. Tsang, J. Kong, K. Ding, *Scattering of Electromagnetic Waves: Theories and Applications* (John Wiley, 2000).

Consideramos dos medios ocupando los volúmenes V_1 y V_2 separados por la superficie S. $\mathbf{n}$ es la normal a S exterior a V_1. Consideramos una onda escalar ψ con velocidad de propagación c_1 en V_1 y c_2 en V_2. Asumimos que las fuentes del campo están todas en V_1.



Estamos mirando soluciones monocromáticas, con frecuencia ω, de manera que la ecuación de ondas se reduce a las ecuaciones de Helmholtz

$$\begin{aligned} \Delta\psi + k_1^2\psi &= -j_1 \quad \text{en } V_1 \\ \Delta\psi + k_2^2\psi &= 0 \quad \text{en } V_2 \end{aligned} \tag{33}$$

donde $k_i^2 = \omega^2/c_i^2$. Las condiciones de contorno son que ψ y $\mathbf{n}\cdot\nabla\psi$ son continuos a través de S

Para cada ecuación de Helmholtz tenemos la función de Green *en el espacio libre*

$$G_i\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right)=\frac{e^{ik_i|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|} \tag{34}$$

que es solución de

$$\Delta G_i\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right)+k_i^2G_i\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right)=-\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right) \tag{35}$$

Ahora miramos la siguiente integral

$$J_1 = \int_{V_1} d^3x' \, \nabla' \cdot \left\{ G_1\left(\mathbf{x}', \mathbf{x}\right) \nabla' \psi\left(\mathbf{x}'\right) - \psi\left(\mathbf{x}'\right) \nabla' G_1\left(\mathbf{x}', \mathbf{x}\right) \right\} \tag{36}$$

Distribuyendo la divergencia y usando la ecuación de ondas, encontramos que

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{V_1} d^3x' \ \left\{\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)\psi\left(\mathbf{x}'\right) - G_1\left(\mathbf{x}',\mathbf{x}\right) j\left(\mathbf{x}'\right)\right\} \\ &= \int_{V_1} d^3x' \ \delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)\psi\left(\mathbf{x}'\right) - \psi_{ext}\left(\mathbf{x}\right) \end{aligned} \tag{37}$$

El segundo término es el campo generado por la fuente en ausencia de la interfase. Usando el teorema de Gauss, en cambio

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_S ds' \ \left\{G_1\left(\mathbf{x}',\mathbf{x}\right)\mathbf{n}\cdot\nabla'\psi\left(\mathbf{x}'\right) - \psi\left(\mathbf{x}'\right)\mathbf{n}\cdot\nabla' G_1\left(\mathbf{x}',\mathbf{x}\right)\right\} \\ &\equiv \psi_{1s}\left(\mathbf{x}\right) \end{aligned} \tag{38}$$

es el campo dispersado por la interfase.

Si $\mathbf{x} \in V_1$,

$$\int_{V_1} d^3x' \, \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) \psi\left(\mathbf{x}'\right) = \psi\left(\mathbf{x}\right) \tag{39}$$

y obtenemos

$$\psi\left(\mathbf{x}\right) = \psi_{ext}\left(\mathbf{x}\right) + \psi_{1s}\left(\mathbf{x}\right), \qquad \mathbf{x} \in V_1 \tag{40}$$

Este es el *Principio de Huygens*.

Si $\mathbf{x} \in V_2$,

$$\int_{V_1} d^3x' \, \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) \psi\left(\mathbf{x}'\right) = 0 \tag{41}$$

y obtenemos

$$\psi_{ext}\left(\mathbf{x}\right) + \psi_{1s}\left(\mathbf{x}\right) = 0, \qquad \mathbf{x} \in V_2 \tag{42}$$

Este es el *Teorema de extinción*. El campo dispersado apantalla completamente el campo incidente.

Ahora miramos la integral

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_{V_2} d^3x' \, \nabla' \cdot \left\{ G_2\left(\mathbf{x}', \mathbf{x}\right) \nabla' \psi\left(\mathbf{x}'\right) - \psi\left(\mathbf{x}'\right) \nabla' G_2\left(\mathbf{x}', \mathbf{x}\right) \right\} \\
&= \int_{V_2} d^3x' \, \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) \psi\left(\mathbf{x}'\right) \\
&= -\int_{S} ds' \, \left\{ G_2\left(\mathbf{x}', \mathbf{x}\right) \mathbf{n} \cdot \nabla' \psi\left(\mathbf{x}'\right) - \psi\left(\mathbf{x}'\right) \mathbf{n} \cdot \nabla' G_2\left(\mathbf{x}', \mathbf{x}\right) \right\} \\
&\equiv \psi_{2s}\left(\mathbf{x}\right) \qquad (43)
\end{aligned}
$$

Si $\mathbf{x} \in V_2$,

$$\int_{V_2} d^3x' \; \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) \psi\left(\mathbf{x}'\right) = \psi\left(\mathbf{x}\right) \tag{44}$$

y obtenemos

$$\psi\left(\mathbf{x}\right) = \psi_{2s}\left(\mathbf{x}\right), \qquad \mathbf{x} \in V_2 \tag{45}$$

Este es el *Principio de Huygens*. Si $\mathbf{x} \in V_1$,

$$\int_{V_2} d^3x' \; \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) \psi\left(\mathbf{x}'\right) = 0 \tag{46}$$

y obtenemos

$$\psi_{2s}\left(\mathbf{x}\right) = 0, \qquad \mathbf{x} \in V_1 \tag{47}$$

Este es el *Teorema de extinción*. Las corrientes inducidas en la interfase radian solamente en la dirección de V_2.

En la práctica, los teoremas de extinción (42) y (47) se pueden usar como un par de ecuaciones integrales acopladas para el campo y su derivada normal en la interfase, y entonces el Principio de Huygens (40) y (45) determina la solución a ambos lados de la frontera.

El lunes vamos a continuar estudiando cómo se comporta el campo electromagnético en la frontera entre dos medios.