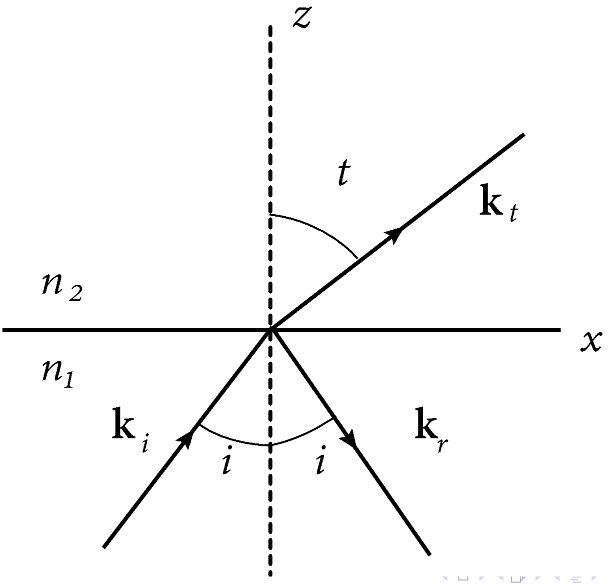
COEFICIENTES DE FRESNEL

Knowing how it could change the lives of canines everywhere, the dog scientists struggled diligently to understand the Doorknob Principle.

Consideramos el problema de transmisión y reflexión de una onda plana en la interfase entre dos medios con constante dieléctrica y permeabilidad (ϵ_1, μ_1) y (ϵ_2, μ_2), respectivamente.



El problema está circunscripto al plano definido por la normal a la interfase y el vector de onda incidente, que tomamos como plano (x, z). Consideramos radiación monocromática de frecuencia ω, de modo que $k_i = k_r = n_1\omega/c$ y $k_t = n_2\omega/c$, donde $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ es el índice de refracción.

Podemos pensar el problema como la superposición de una onda viajando en la dirección x y otra en la dirección z. La continuidad de los campos en la interfase indica que el número de onda de las ondas en la dirección x es el mismo de ambos lados de la interfase, de donde la Ley de Snell $k_t \sin t = k_i \sin i$ y la igualdad del ángulo de reflexión y de incidencia. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{k}}_i &= \sin i\, \mathbf{I} + \cos i\, \mathbf{K} \\
\hat{\mathbf{k}}_r &= \sin i\, \mathbf{I} - \cos i\, \mathbf{K} \\
\hat{\mathbf{k}}_t &= \sin t\, \mathbf{I} + \cos t\, \mathbf{K} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Los campos magnéticos están relacionados a los eléctricos por la Ley de Faraday, que en este contexto es

$$-i\frac{\omega}{c}\mathbf{B} + ik\,\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = 0 \tag{2}$$

o

$$\mathbf{B} = \sqrt{\epsilon\mu}\,\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \tag{3}$$

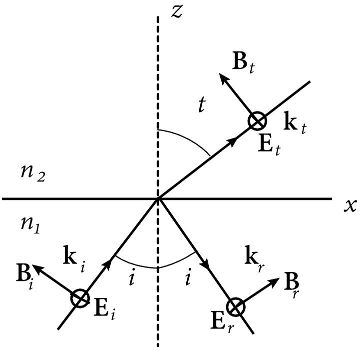
para cada onda.

El objetivo es determinar los *coeficientes de Fresnel* que determinan las amplitudes de los campos eléctricos transmitido y reflejados relativas a la del campo incidente.

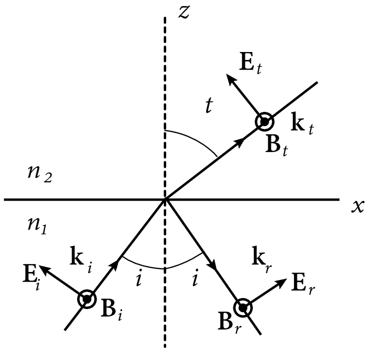
Auguste-Jean Fresnel (1788-1827)

$$\begin{aligned} E_t &\equiv T\,[2,1]\,E_i \\ E_r &\equiv R\,[2,1]\,E_i \end{aligned} \tag{4}$$

Es conveniente distinguir el caso de "polarización horizontal" (h), en el que los campos eléctricos son perpendiculares al plano de incidencia, y por lo tanto están dirigidos en la dirección del eje y, y la "polarización vertical" (v), en que los campos eléctricos están comprendidos en el plano de incidencia.



Polarización horizontal



Polarización vertical

En el caso de polarización horizontal, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i &= E_i\mathbf{J} \\ \mathbf{E}_r &= E_r\mathbf{J} \\ \mathbf{E}_t &= E_t\mathbf{J}\end{aligned} \tag{5}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_i &= \sqrt{\epsilon_1\mu_1}\; E_i\,[-\cos i\;\mathbf{I} + \sin i\;\mathbf{K}] \\ \mathbf{B}_r &= \sqrt{\epsilon_1\mu_1}\; E_r\,[\;\cos i\;\mathbf{I} + \sin i\;\mathbf{K}] \\ \mathbf{B}_t &= \sqrt{\epsilon_2\mu_2}\; E_t\,[-\cos t\;\mathbf{I} + \sin t\;\mathbf{K}]\end{aligned} \tag{6}$$

En este caso, la continuidad de las componentes normales de **D** es trivial, y la de las componentes normales de **B** y tangenciales de **E** ambas dan

$$E_t - E_r = E_i \tag{7}$$

Por lo tanto, es necesario aplicar la condición de la continuidad de las componentes tangenciales de $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, que da

$$\vartheta_2 E_t + \vartheta_1 E_r = \vartheta_1 E_i \tag{8}$$

donde $\vartheta_1 = \sqrt{\epsilon_1/\mu_1}\cos i$, $\vartheta_2 = \sqrt{\epsilon_2/\mu_2}\cos t$.

Resolviendo el sistema

$$
\begin{aligned}
T_h[2,1] &= \frac{2\vartheta_1}{\vartheta_1+\vartheta_2} \\
R_h[2,1] &= \frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

En el caso de polarización vertical, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= E_i\,[-\cos i\;\mathbf{I} + \sin i\;\mathbf{K}] \\ \mathbf{E}_r &= E_r\,[\;\;\cos i\;\mathbf{I} + \sin i\;\mathbf{K}] \\ \mathbf{E}_t &= E_t\,[-\cos t\;\mathbf{I} + \sin t\;\mathbf{K}] \end{aligned} \tag{10}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= -\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\;E_i\mathbf{J} \\ \mathbf{B}_r &= -\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\;E_r\mathbf{J} \\ \mathbf{B}_t &= -\sqrt{\epsilon_2\mu_2}\;E_t\mathbf{J} \end{aligned} \tag{11}$$

En este caso, la continuidad de las componentes normales de **B** es trivial, y la de las componentes normales de **D** y tangenciales de **H** ambas dan

$$\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_t - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_r = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_i \tag{12}$$

La continuidad de las componentes tangenciales de **E** da

$$\cos t \; E_t + \cos i \; E_r = \cos i \; E_i \tag{13}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} T_v\left[2,1\right] &= \frac{2\vartheta_1}{\alpha\vartheta_1+\alpha^{-1}\vartheta_2} \\ R_v\left[2,1\right] &= \frac{\alpha\vartheta_1-\alpha^{-1}\vartheta_2}{\alpha\vartheta_1+\alpha^{-1}\vartheta_2} \end{aligned} \tag{14}$$

donde

$$\alpha=\sqrt{\frac{\epsilon_2\mu_1}{\epsilon_1\mu_2}} \tag{15}$$

LOS COEFICIENTES DE FRESNEL Y LA CONSERVACION DE LA ENERGIA

En cada una de las ondas, el vector de Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\, E^2\hat{\mathbf{k}} \tag{16}$$

El flujo del vector de Poynting a través de la interfase debe ser continuo, por lo tanto

$$\vartheta_1 \left(1 - R^2\,[2,1]\right) = \vartheta_2\, T^2\,[2,1] \tag{17}$$

Los coeficientes de Fresnel que hemos encontrado satisfacen esta relación.

Polarización horizontal:

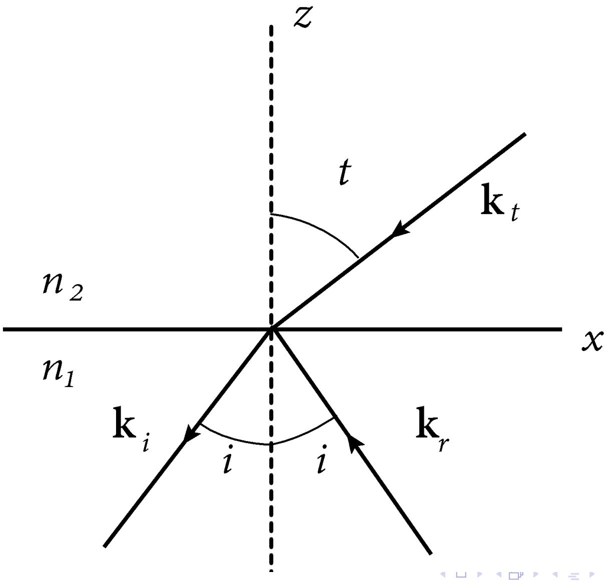
$$\vartheta_1 \left(1 - \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \right)^2 \right) = \vartheta_2 \left(\frac{2\vartheta_1}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \right)^2 \qquad (18)$$

Polarización vertical:

$$\vartheta_1 \left(1 - \left(\frac{\alpha\vartheta_1 - \alpha^{-1}\vartheta_2}{\alpha\vartheta_1 + \alpha^{-1}\vartheta_2} \right)^2 \right) = \vartheta_2 \left(\frac{2\vartheta_1}{\alpha\vartheta_1 + \alpha^{-1}\vartheta_2} \right)^2 \qquad (19)$$

INVERSION TEMPORAL

Por la invariancia del electromagnetismo frente a la inversión temporal, esta situación es posible:



Vemos que

a) La onda reflejada en el medio 2 interfiere destructivamente con la onda transmitida del medio 1 al 2

$$R\,[1,2]\;T\,[2,1] + T\,[2,1]\;R\,[2,1] = 0 \tag{20}$$

Por lo tanto

$$R\,[1,2] = -R\,[2,1] \tag{21}$$

Los coeficientes de Fresnel que hemos encontrado satisfacen esta relación.

Polarización horizontal:

$$R_h\,[2,1] = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \tag{22}$$

Polarización vertical:

$$R_v\,[2,1] = \frac{\alpha\vartheta_1 - \alpha^{-1}\vartheta_2}{\alpha\vartheta_1 + \alpha^{-1}\vartheta_2} \tag{23}$$

b) La onda reflejada en el medio 1 y la onda transmitida del medio 2 al 1 reconstruyen la onda incidente original

$$R^2\,[2,1] + T\,[1,2]\,T\,[2,1] = 1 \tag{24}$$

Por lo tanto, usando la condición de la conservación de la energía,

$$T\,[1,2] = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\,T\,[2,1] \tag{25}$$

Los coeficientes de Fresnel que hemos encontrado satisfacen esta relación.

Polarización horizontal:

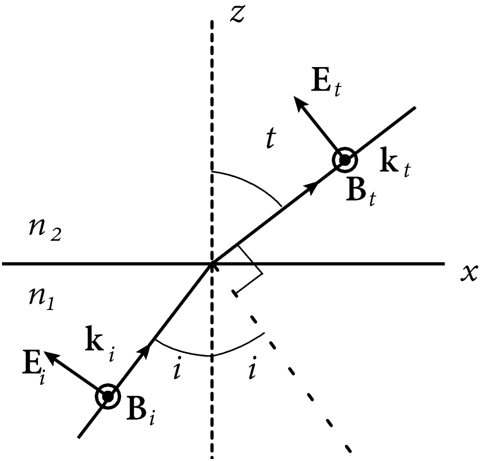
$$T_h\,[2,1] = \frac{2\vartheta_1}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \tag{26}$$

Polarización vertical:

$$T_v\,[2,1] = \frac{2\vartheta_1}{\alpha\vartheta_1 + \alpha^{-1}\vartheta_2} \tag{27}$$

ANGULO DE BREWSTER

En condiciones de polarización vertical, si $\mu_1 = \mu_2$ y la onda transmitida y la reflejada forman un ángulo recto, entonces $E_r = 0$. El ángulo *i* en este caso se conoce como *ángulo de Brewster*.



Efectivamente, en este caso

$$\begin{aligned} \cos t &= \sin i \\ \cos i &= \sin t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin i \end{aligned} \tag{28}$$

Por lo tanto

$$R[2,1] \propto \sqrt{\epsilon_2} \cos i - \sqrt{\epsilon_1} \cos t = 0 \tag{29}$$

Incidentalmente,

$$\tan i = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \tag{30}$$

ONDAS EVANESCENTES

Si $n_1 > n_2$, puede darse el caso que $(n_1/n_2)\sin i > 1$. En ese caso, la solución a la Ley de Snell es que t deviene complejo

$$t = \frac{\pi}{2} - i\tau \tag{31}$$

ya que entonces

$$\begin{aligned} \sin\ t &= \cos(i\tau) = \cosh\tau \\ \cos\ t &= \sin(i\tau) = i\sinh\tau \end{aligned} \tag{32}$$

La "onda" transmitida es proporcional a

$$e^{i\left[(n_2\omega/c)\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{x}-\omega t\right]} = e^{i[(n_2\omega/c)cosh\ \tau\ x-\omega t]}e^{-(n_2\omega/c)sinh\ \tau\ z} \tag{33}$$

La posibilidad de ondas evanescentes existe en cualquier fenómeno ondulatorio.

Consideremos una teoría de ondas escalares

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{34}$$

La densidad de energía es

$$\rho = \frac{1}{c^2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2 + \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi \tag{35}$$

El vector flujo de energía es

$$\mathbf{S} = -\left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\nabla\psi + \frac{\partial \psi}{\partial t}\nabla\psi^*\right] \tag{36}$$

Para una onda monocromática

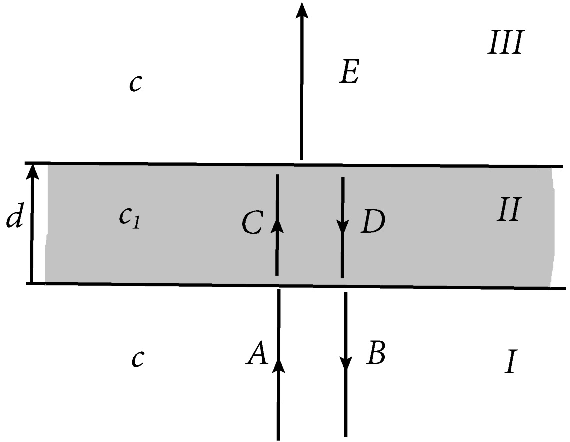
$$\mathbf{S} = -i\omega\left[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right] \tag{37}$$

Por lo tanto *una exponencial real no transporta energía*.

$$\begin{aligned} \psi &= Ae^{-\kappa z - i\omega t} \\ S &= i\omega\left|A\right|^2(\kappa - \kappa) = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

O sí?

Consideramos una lámina de caras paralelas de espesor d inmersa en un medio en que la velocidad de la onda es c, mientras que dentro de la lámina la velocidad es $c_1 > c$. Las condiciones de contorno son la continuidad de ψ y de $\psi_{,z}$ en las interfases.



Dividimos el espacio en tres regiones, *I* ($z \leq 0$), *II* ($0 \leq z \leq d$) y *III* ($z \geq d$). En las tres regiones el campo es de la forma $\psi_i = f_i(z)\, e^{i(k_x x - \omega t)}$, pero, mientras que $k_x^2 < (\omega/c)^2$, ocurre que $k_x^2 > (\omega/c_1)^2$. Por eso la solución corresponde a exponenciales complejas en las regiones *I* y *III*, pero reales en la región *II*.

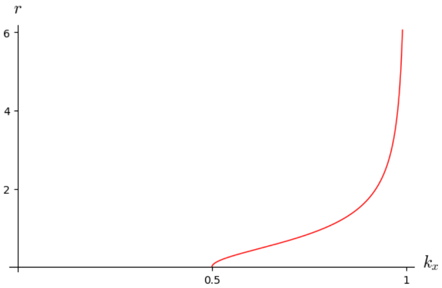
$$
\begin{aligned}
f_I(z) &= A\, e^{ikz} + B\, e^{-ikz} \\
f_{II}(z) &= C\, e^{-\kappa z} + D\, e^{\kappa z} \\
f_{III}(z) &= E\, e^{ik(z-d)}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

donde $k = \sqrt{(\omega/c)^2 - k_x^2}$ y $\kappa = \sqrt{k_x^2 - (\omega/c_1)^2}$.

Las condiciones de contorno dan

$$\begin{aligned} C\,e^{-\kappa d} + D\,e^{\kappa d} &= E \\ ir\left(C\,e^{-\kappa d} - D\,e^{\kappa d}\right) &= E \\ C + D &= A + B \\ ir\,(C - D) &= A - B \end{aligned} \tag{40}$$

donde $r = \kappa/k$.



En el límite $\kappa d \gg 1$,

$$E \approx \frac{4r}{(1+r^2)} e^{-\kappa d} A \tag{41}$$

Por lo tanto, hay un flujo de energía en la dirección de las z's positivas

$$S \approx \frac{16r^2}{\left(1+r^2\right)^2} e^{-2\kappa d} \left(2k\omega \left|A\right|^2\right) \tag{42}$$

Además

$$\frac{B}{A} = e^{i\delta} \left\{1 + O\left(e^{-2\kappa d}\right)\right\} \tag{43}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\delta\right) = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \tag{44}$$

Si $A \approx e^{-i\omega t}$, $B \approx e^{-i\omega(t-t_0)}$, $t_0 = \delta/\omega$

El miércoles vamos a discutir algunas propiedades de medios dispersivos.