

MEDIOS DISPERSIVOS



Paul Drude (1863-1906)

En esta clase

- ▶ El modelo de Drude.
- ▶ La susceptibilidad compleja.
- ▶ Propagación de ondas en un medio dispersivo.

EL MODELO DE DRUDE

El modelo de Drude (1900) intenta explicar las propiedades macroscópicas de un medio dieléctrico a partir de un modelo microscópico.

La hipótesis básica es que la respuesta del medio a un campo eléctrico aplicado depende fundamentalmente del comportamiento de los electrones (que habían sido descubiertos por J. J. Thomson en 1897).

El electrón α se considera ligado a un sitio \mathbf{x}_α por una fuerza elástica. Al aplicar un campo eléctrico \mathbf{E} sufre un desplazamiento $\delta\mathbf{x}_\alpha$. Por lo tanto la densidad de carga $\rho_e = en$

$$n(\mathbf{x}) = e \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) \quad (1)$$

deviene

$$\rho_e(\mathbf{x}) = e \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha - \delta\mathbf{x}_\alpha) = en^{(0)} - \nabla\mathbf{P} \quad (2)$$

donde la polarización

$$\mathbf{P} = e \sum_{\alpha} \delta\mathbf{x}_\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) \quad (3)$$

Para continuar, asumimos que el campo aplicado varía poco en las distancias características del desplazamiento de los electrones, por lo que puede considerarse homogéneo en el espacio, pero variable en el tiempo. También despreciamos el campo magnético, y asumimos que al desplazarse en el medio el electrón sufre una fuerza viscosa $-m\gamma\delta\dot{\mathbf{x}}_\alpha$. Entonces, cada electrón evoluciona de acuerdo a la ecuación

$$\delta\ddot{\mathbf{x}}_\alpha + \gamma\delta\dot{\mathbf{x}}_\alpha + \omega_0^2\delta\mathbf{x}_\alpha = \frac{e}{m}\mathbf{E} \quad (4)$$

Con solución

$$\delta\mathbf{x}_\alpha(t) = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^t dt' G(t-t') \mathbf{E}(t') \quad (5)$$

$$G(t) = e^{-\gamma t/2} \frac{\sin \Omega t}{\Omega} \quad (6)$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}$$

Vemos que la polarización no depende del valor instantáneo del campo eléctrico, sino de su *historia*

$$\mathbf{P} = \int_{-\infty}^t dt' \bar{\chi}(t-t') \mathbf{E}(t') \quad (7)$$

$$\bar{\chi}(t-t') = \frac{e^2 n}{m} G(t-t') \quad (8)$$

Sólo cuando el campo eléctrico es lentamente variable en escalas de tiempo del orden de $1/\gamma$, podemos aproximar

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \quad (9)$$

$$\chi = \int_0^{\infty} dt \bar{\chi}(t) = \frac{e^2 n}{m \omega_0^2} \quad (10)$$

Cuando $\omega_0 \rightarrow 0$ (y los electrones están sobreamortiguados) pareciera que la susceptibilidad diverge (y por lo tanto también la constante dieléctrica $\epsilon = 1 + 4\pi\chi$).



Sin embargo, la ecuación de Ampère-Maxwell está bien definida, porque

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^t dt' \left[\frac{\partial}{\partial t} \bar{\chi}(t-t') \right] \mathbf{E}(t') \quad (11)\end{aligned}$$

y para un campo estacionario

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} [\bar{\chi}(\infty) - \bar{\chi}(0)] \mathbf{E} \\ &\equiv \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} \quad (12)\end{aligned}$$

que es la ecuación de un medio conductor.

En el límite $\omega_0 \rightarrow 0$

$$\bar{\chi}(t - t') = \frac{e^2 n}{m\gamma} [1 - e^{-\gamma t}] \quad (13)$$

y

$$\sigma = \bar{\chi}(\infty) - \bar{\chi}(0) = \frac{e^2 n}{m\gamma} \quad (14)$$

Si paramos acá, lo único que hicimos fue escribir la cantidad observable σ en términos de la cantidad inobservable γ . Esta es la objeción positivista a la teoría cinética.

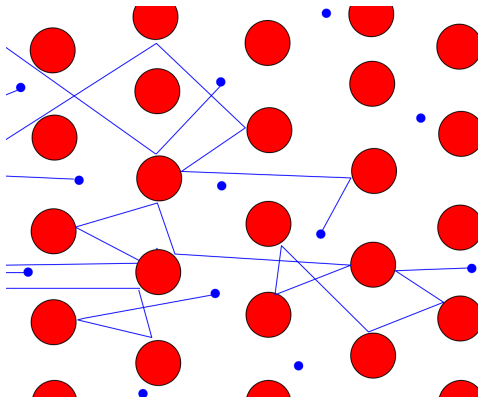


Ernst Mach (1838-1916)

El mérito de modelos como el de Drude es que al referir el comportamiento macroscópico del medio a un modelo microscópico sencillo, permite vincular entre sí las respuestas del medio a distintos estímulos.

En este caso, el medio se visualiza como compuesto de partículas (electrones) esencialmente libres que se mueven con movimiento uniforme puntuado por colisiones con iones.

La distancia recorrida entre colisiones sucesivas es el camino libre medio $\lambda = 1 / (n\sigma_{ef})$, donde σ_{ef} es la sección eficaz para la colisión. Como cada electrón tiene una energía del orden de $k_B T$ (con $k_B \approx 10^{-23} \text{JK}^{-1}$ la constante de Boltzmann), su velocidad media $v \approx \sqrt{k_B T / m}$. El γ de Drude se puede identificar como la frecuencia de las colisiones $\gamma = v / \lambda$.



Supongamos que la temperatura en el medio no fuese exactamente homogénea. Electrones de una zona a temperatura T van a viajar una distancia λ a una zona más fría, donde randomizan, inyectando una energía $k_B\delta T \approx -k_B\lambda\nabla T$ al medio en la nueva región. Como el flujo de partículas es nv , de esa manera se establece un flujo de calor

$$\mathbf{q} = (nv) k_B\delta T \equiv -\kappa\nabla T \quad (15)$$

donde

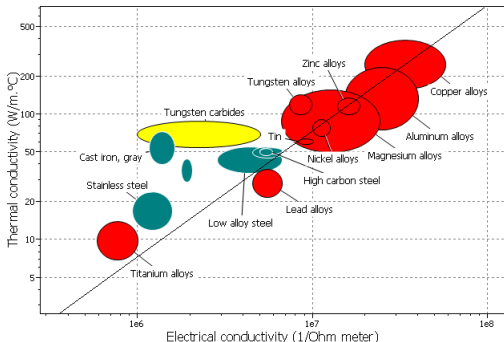
$$\kappa = nv\lambda k_B \quad (16)$$

es la conductividad térmica.

Comparando la expresión para la conductividad térmica con la conductividad eléctrica de Drude (14), obtenemos

$$\frac{\kappa}{\sigma} = k_B \frac{mv\lambda\gamma}{e^2} = k_B \frac{mv^2}{e^2} = \frac{k_B^2}{e^2} T \quad (17)$$

que es la Ley de Wiedemann-Franz (1853).



Fuente: https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/thermal_electrical/printall.php

LA SUSCEPTIBILIDAD COMPLEJA¹

Más allá del modelo de Drude, la relación entre la polarización \mathbf{P} y el campo eléctrico \mathbf{E} siempre se puede escribir como

$$\mathbf{P}(t) = \int dt' \bar{\chi}(t-t') \mathbf{E}(t') \quad (18)$$

Independientemente de cualquier modelo, $\bar{\chi}$ tiene dos propiedades básicas

- ▶ Es real.
- ▶ Es causal: $\bar{\chi}(t) = 0$ si $t < 0$

¹L. Landau y E. Lifshitz, Curso de Física Teórica V: Física Estadística, cap. XII, sección 123.

Es conveniente introducir las transformadas de Fourier

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathbf{P}_\omega \\ \mathbf{P}_\omega &= \int dt e^{i\omega t} \mathbf{P}(t)\end{aligned}\quad (19)$$

y similarmente para $\bar{\chi}$ y \mathbf{E} . Entonces $\mathbf{P}_\omega = \bar{\chi}_\omega \mathbf{E}_\omega$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\omega &= \int dt e^{i\omega t} \int dt' \bar{\chi}(t-t') \mathbf{E}(t') \\ &= \int dt dt' e^{i\omega t} \int \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega'(t-t')} \bar{\chi}_{\omega'} \int \frac{d\omega''}{2\pi} e^{-i\omega'' t'} \mathbf{E}_{\omega''} \\ &= \int \frac{d\omega'}{2\pi} \bar{\chi}_{\omega'} \int \frac{d\omega''}{2\pi} \mathbf{E}_{\omega''} \int dt e^{i(\omega-\omega')t} \int dt' e^{i(\omega'-\omega'')t'} \\ &= \bar{\chi}_\omega \mathbf{E}_\omega\end{aligned}\quad (20)$$

Las propiedades de $\bar{\chi}(t)$ se traducen en propiedades de $\bar{\chi}_\omega$.

Por ejemplo, como $\bar{\chi}(t)$ es real,

$$\operatorname{Re} \bar{\chi}_\omega = \int dt \cos(\omega t) \bar{\chi}(t) \quad (21)$$

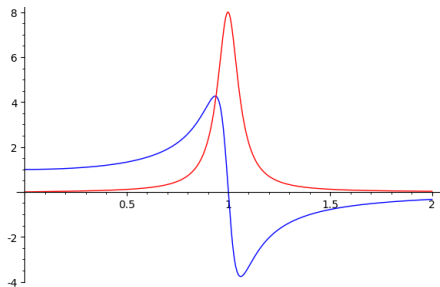
es una función par de ω , mientras que

$$\operatorname{Im} \bar{\chi}_\omega = \int dt \sin(\omega t) \bar{\chi}(t) \quad (22)$$

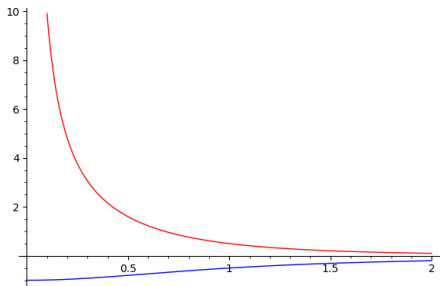
es impar. Por lo tanto $\bar{\chi}_{-\omega} = \bar{\chi}_\omega^*$.

En el modelo de Drude

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_\omega &= \frac{-e^2 n}{m} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega - \omega_0^2} \\ &= \frac{e^2 n}{m} \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} + i \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right] \quad (23) \end{aligned}$$



$\omega_0 \neq 0, \gamma/\omega_0 = 1/8$



$\omega_0 = 0, \gamma \Rightarrow 1$

La ecuación de Ampère-Maxwell se convierte en

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}_\omega &= \frac{-i\omega}{c} \mathbf{D}_\omega \\ &= \frac{-i\omega}{c} [1 + 4\pi \text{Re } \bar{\chi}_\omega] \mathbf{E}_\omega + \frac{4\pi}{c} \omega \text{Im } \bar{\chi}_\omega \mathbf{E}_\omega\end{aligned}\quad (24)$$

Por lo tanto $\sigma_\omega = \omega \text{Im } \bar{\chi}_\omega$ se puede pensar como una conductividad, y la constante dieléctrica compleja es

$$\bar{\epsilon}_\omega = [1 + 4\pi \text{Re } \bar{\chi}_\omega] + i \frac{\sigma_\omega}{\omega}\quad (25)$$

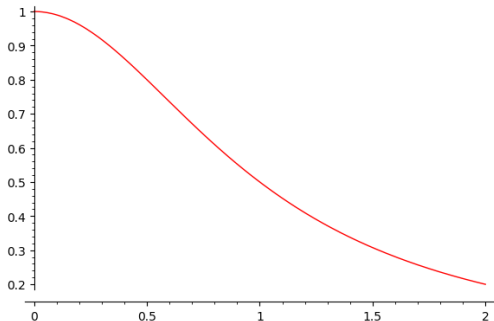
Para un medio conductor, ϵ_ω diverge si $\omega \rightarrow 0$.

La energía disipada es

$$Q = \int dt \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{j}_\omega \cdot \mathbf{E}_\omega^* = \int \frac{d\omega}{2\pi} \sigma_\omega |\mathbf{E}_\omega|^2 \quad (26)$$

Para que la energía disipada sea definida positiva, debe ser

$$\sigma_\omega = \omega \text{Im} \bar{\chi}_\omega \geq 0 \quad (27)$$



CAUSALIDAD Y RELACIONES DE KRAMERS-KRONIG

Para explorar las restricciones sobre $\bar{\chi}_\omega$ que se derivan del principio de causalidad, es conveniente extender la definición de $\bar{\chi}_\omega$ al plano complejo

$$\bar{\chi}[z] = \int dt e^{izt} \bar{\chi}(t) \quad (28)$$

$\bar{\chi}[-z^*] = (\bar{\chi}[z])^*$. Si $z = \omega + i\eta$, con $\eta \geq 0$, entonces

$$\bar{\chi}[z] = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} e^{-\eta t} \bar{\chi}(t) \quad (29)$$

Entonces

$$|\bar{\chi}[z]|^2 \leq \frac{1}{2\eta} \int_0^\infty dt |\bar{\chi}(t)|^2 \quad (30)$$

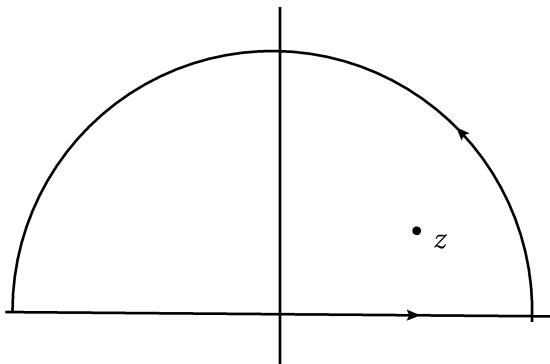
Si la integral converge, entonces $\bar{\chi}[z]$ no posee singularidades en el semiplano superior

Si ahora miramos la integral

$$J = \int \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{\bar{\chi}[\xi]}{(\xi - \omega - i\eta)} \quad (31)$$

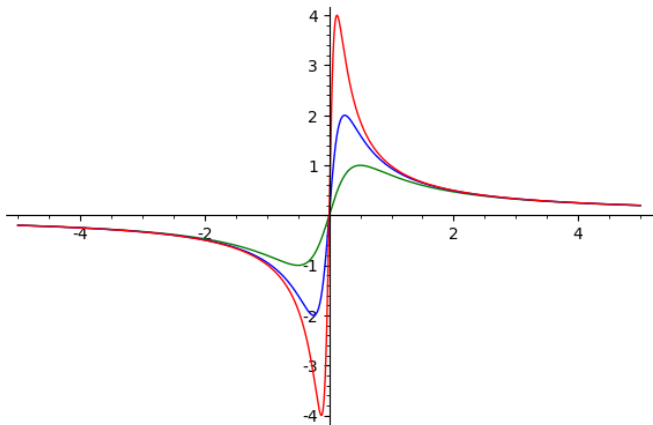
podemos calcularla cerrando el contorno en el semiplano superior, en cuyo caso sólo encontramos un polo simple en $z = \omega + i\eta$. Entonces

$$J = \bar{\chi}[\omega + i\eta] \quad (32)$$



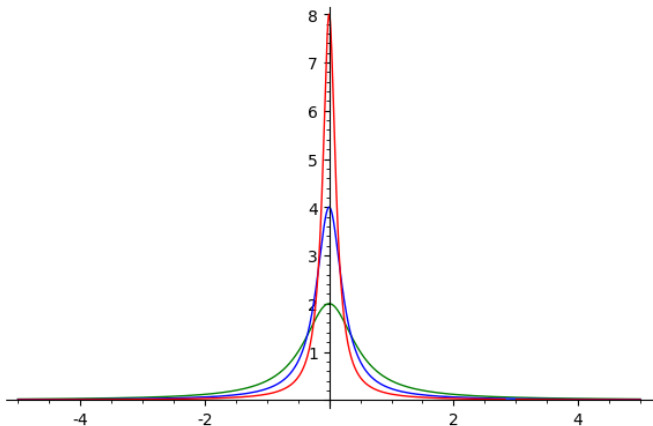
Si ahora tomamos el límite $\eta \rightarrow 0$, encontramos

$$\operatorname{Re} \frac{1}{(\xi - \omega - i\eta)} = \frac{(\xi - \omega)}{((\xi - \omega)^2 + \eta^2)} \rightarrow \operatorname{VP} \frac{1}{(\xi - \omega)} \quad (33)$$



Verde: $\eta = 0,5$; azul: $\eta = 0,25$; rojo: $\eta = 0,125$.

$$\text{Im} \frac{1}{(\xi - \omega - i\eta)} = \frac{\eta}{((\xi - \omega)^2 + \eta^2)} \rightarrow \pi\delta(\xi - \omega) \quad (34)$$



Verde: $\eta = 0,5$; azul: $\eta = 0,25$; rojo: $\eta = 0,125$.

Entonces

$$\bar{\chi}[\omega] = \text{VP} \int \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{\bar{\chi}[\xi]}{(\xi - \omega)} + \frac{1}{2} \bar{\chi}[\omega] \quad (35)$$

o

$$\bar{\chi}[\omega] = \text{VP} \int \frac{d\xi}{\pi i} \frac{\bar{\chi}[\xi]}{(\xi - \omega)} \quad (36)$$

Separando la parte real e imaginaria

$$\begin{aligned} \text{Re } \bar{\chi}[\omega] &= \frac{1}{\pi} \text{VP} \int d\xi \frac{\text{Im } \bar{\chi}[\xi]}{(\xi - \omega)} \\ \text{Im } \bar{\chi}[\omega] &= \frac{-1}{\pi} \text{VP} \int d\xi \frac{\text{Re } \bar{\chi}[\xi]}{(\xi - \omega)} \end{aligned} \quad (37)$$

Estas son las *relaciones de Kramers-Kronig*.

PROPAGACION DE ONDAS EN MEDIOS DISPERSIVOS

Como ejemplo de ondas con una relación de dispersión no trivial, tomamos la ecuación de Klein-Gordon

$$\frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 \psi}{\delta t^2} - \Delta \psi + m^2 \psi = 0 \quad (38)$$

Para la cual la relación de dispersión es

$$\omega_k = c \sqrt{k^2 + m^2} \quad (39)$$

Obsérvese que las velocidades de fase son siempre mayores que c

$$\frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{m^2}{k^2}} > c \quad (40)$$

mientras que las velocidades de grupo son causales

$$\frac{d\omega_k}{dk} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{k^2}}} < c \quad (41)$$

La función de Green de la ecuación de Klein-Gordon en tres dimensiones espaciales²

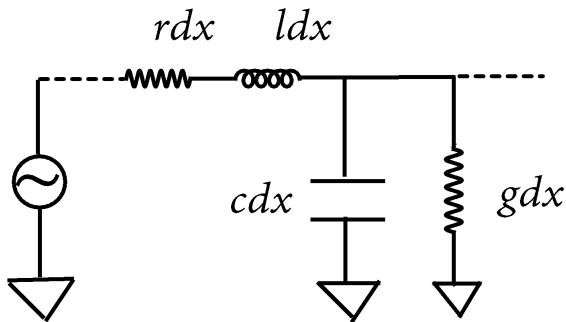
$$G = \frac{c}{4\pi} \theta(t) \left[m \frac{J_1 \left[m \sqrt{c^2 t^2 - r^2} \right]}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \theta(ct - r) - \frac{\delta(ct - r)}{r} \right] \quad (42)$$

tiene soporte en el cono de la luz, lo cual muestra que la velocidad máxima de propagación es c . Sin embargo, a diferencia de la ecuación de ondas, G muestra una estructura compleja en el interior del cono.

²E. Economou, *Greens Functions in Quantum Physics* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1979, 1983, 2006)

LA ECUACION DEL TELEGRAFISTA

La *ecuación del telegrafista* es un modelo sencillo de la distribución de voltaje y corriente en una línea de transmisión. La línea se modela como un cable de una dimensión, con una resistencia e inductancia r y \mathcal{L} por unidad de longitud, respectivamente, aislado por un recubrimiento con conductancia g y capacidad c por unidad de longitud.



Cuando comparamos dos puntos a una distancia dx , vemos que el voltaje varía por la caída de potencial en la resistencia rdx y la inductancia $\mathcal{L}dx$, mientras que la corriente cae por la corriente que se desvía por la conductancia gdx y la capacidad cdx . Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -rI - \mathcal{L}\frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -gV - c\frac{\partial V}{\partial t}\end{aligned}\quad (43)$$

o bien

$$\mathcal{L}c\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (g\mathcal{L} + rc)\frac{\partial V}{\partial t} + rgV = 0 \quad (44)$$

La ecuación describe ondas amortiguadas que se propagan con velocidad $C^2 = 1/\mathcal{L}c$.

Como r tiene unidades de Ωm^{-1} mientras g tiene unidades de $\Omega^{-1} m^{-1}$, $L = 1/\sqrt{rg}$ define una longitud característica, y entonces $T = L/C = \sqrt{c\mathcal{L}/rg}$ es un tiempo característico. Definiendo $\xi = x/L$, $\tau = t/T$, la ecuación se convierte en

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + 2\Gamma \frac{\partial V}{\partial \tau} + V = 0 \quad (45)$$

donde

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{L}g}{cr}} + \sqrt{\frac{cr}{\mathcal{L}g}} \right) \geq 1 \quad (46)$$

Si además $V = e^{-\Gamma\tau} v$, entonces

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \mu^2 v = 0 \quad (47)$$

$$\mu = \sqrt{\Gamma^2 - 1} \geq 0 \quad (48)$$

Si $\mathcal{L}g/cr = 1$, la línea propaga un pulso sin deformarlo, aunque amortiguado.

A modo de ejemplo, vamos a considerar el problema de condiciones iniciales con $V(\xi, 0) = 0$, $V_{,\tau}(\xi, 0) = \delta(\xi)$. La solución para $\xi \geq 0$ es³

$$V(\xi, \tau) = \theta(\tau)\theta(\tau - \xi) e^{-\Gamma\tau} I_0 \left[\mu \sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right] \quad (49)$$

donde I_0 es la función de Bessel modificada.

³R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (John Wiley, New York, 1989), Vol II, p. 695.

La semana que viene empezamos con relatividad.