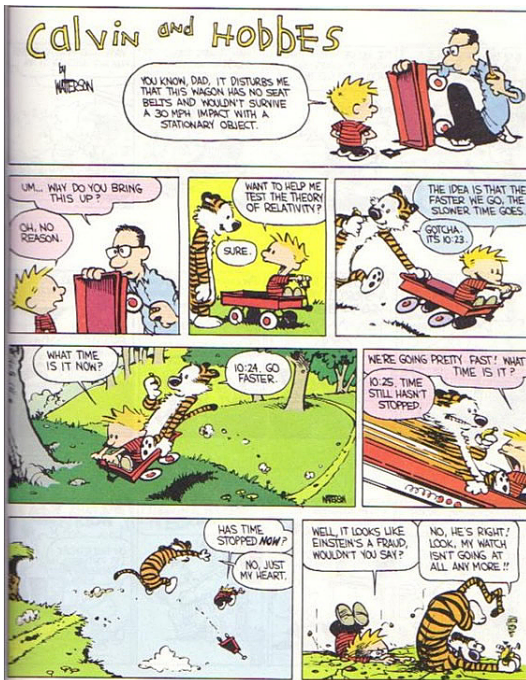


RELATIVIDAD



El Principio de Relatividad afirma que existe una clase de observadores privilegiados (los *observadores inerciales*) para los cuales las leyes de la física son *invariantes de forma*.



Georg Grosz, *El Día Gris* (1921)

Por ejemplo, supongamos que un observador inercial S , que describe el espacio mediante una coordenada x y el tiempo mediante una coordenada t , estudia un fenómeno que se describe mediante una cantidad escalar ψ , y concluye que la ley de propagación es

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = j \quad (1)$$

Entonces otro observador S' , que usa coordenadas x' y t' , asignará valores ψ' y j' a la amplitud de la onda y su fuente, pero llegará a la conclusión de que

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} = j' \quad (2)$$

y no meramente alguna otra ley que ocurre se cumple cuando vale (1).

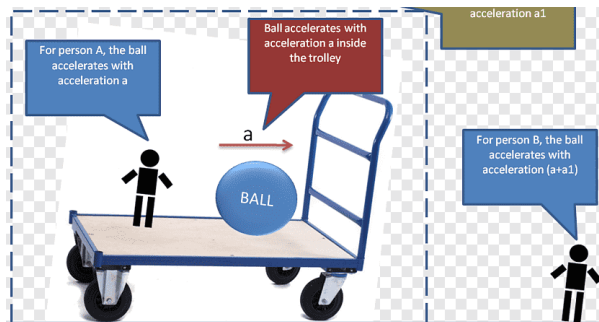
El ejemplo clásico de *no*-invariancia de forma es la ley de Newton entre un observador inercial y otro no inercial con aceleración A . El observador inercial ve

$$F = ma \quad (3)$$

y el no inercial ve

$$F - mA = ma \quad (4)$$

Ambas leyes llevan a las mismas predicciones respecto de la trayectoria de la partícula en cuestión, pero *no son la misma ley*.



Volviendo al ejemplo de la onda, supongamos que la amplitud y su fuente son observables y ambos observadores las miden en un evento P que tiene las coordenadas (t, x) para S y (t', x') para S' . Entonces van a concluir que

$$\psi'(t', x') = \psi(t, x), \quad j'(t', x') = j(t, x) \quad (5)$$

Para que la ecuación de ondas sea invariante de forma, entonces debe ser

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} - j' \right] (t', x') = \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - j \right] (t, x) \quad (6)$$

El problema es que la ecuación de ondas no es invariante de Galileo.



Hokusai, *La gran ola de Kanagawa* (1829)

Introduciendo nuevas variables

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2}(ct - x) \\v &= \frac{1}{2}(ct + x)\end{aligned}\tag{7}$$

con inversa

$$\begin{aligned}t &= \frac{1}{c}(v + u) \\x &= v - u\end{aligned}\tag{8}$$

Encontramos que $\partial_t = c(\partial_u + \partial_v)/2$, $\partial_x = (\partial_v - \partial_u)/2$, y el operador de ondas se reduce a

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\tag{9}$$

En particular, el origen de S' tiene coordenadas (t, Vt) en S y $(t', 0)$ en S' . Por lo tanto

$$ct' = f(V) (c - V) t \quad (11)$$

pero también

$$ct' = \frac{1}{f(V)} (c + V) t \quad (12)$$

de modo que debe ser

$$f = \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}} \quad (13)$$

Esta transformación sólo está definida si $|V| < c$.

Además, vemos que

$$f(-V) = \frac{1}{f(V)} \quad (14)$$

Por lo cual obtenemos la transformación inversa simplemente cambiando el signo de la velocidad.

$$u = \frac{1}{f(V)} u' = f(-V) u', \quad v = f(V) v' = \frac{1}{f(-V)} v' \quad (15)$$

En términos de las coordenadas originales

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma \left[ct - \frac{V}{c}x \right] \\ x' &= \gamma [x - Vt] \end{aligned} \quad (16)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (17)$$

Obviamente

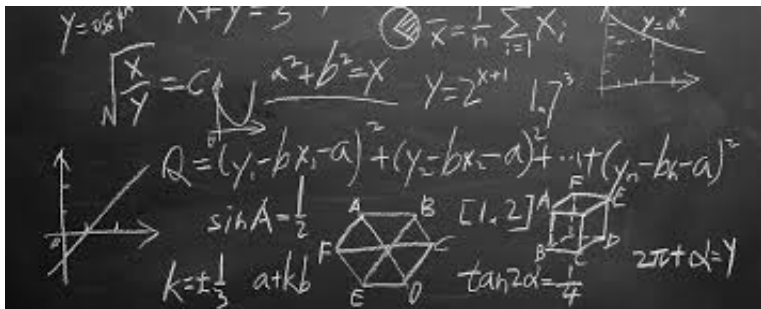
$$c^2 t'^2 - x'^2 = 4u'v' = 4uv = c^2 t^2 - x^2 \quad (18)$$

Algunas propiedades

Composición de velocidades: si un segundo observador inercial S'' tiene velocidad V' respecto de S' y V'' respecto de S , debe ser $f(V'') = f(V')f(V)$. Con un poco de álgebra

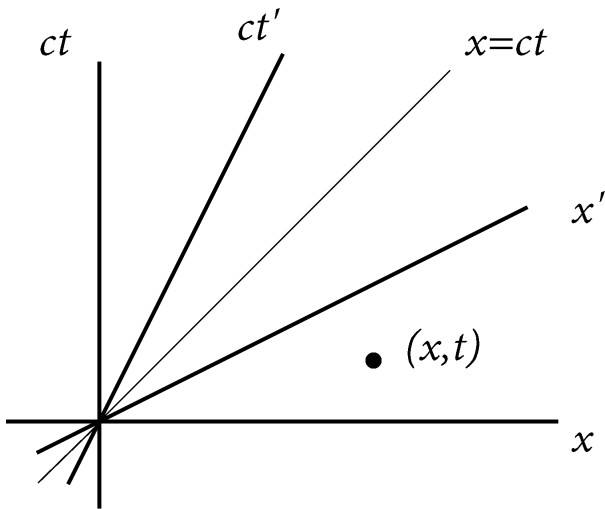
$$V'' = \frac{V + V'}{1 + \frac{VV'}{c^2}} \quad (19)$$

Si $V' = c$, entonces $V'' = V' = c$.



Causalidad: Si $0 < ct < |x|$, entonces existe algún observador inercial para el cual $ct' < 0$.

(D: basta elegir $|V|/c > ct/|x|$)

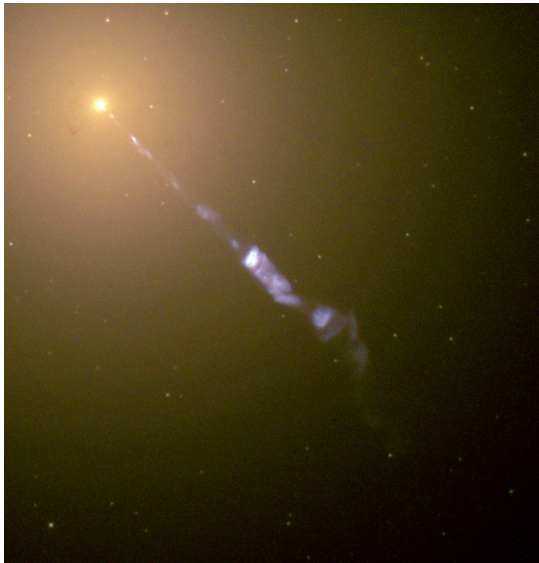


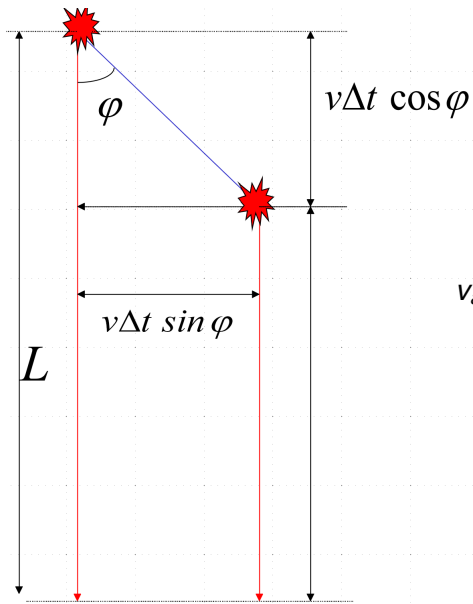
$$V = c/\sqrt{3}$$

Ipso facto sólo es posible establecer relaciones causales entre eventos tales que $c^2 (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \geq 0$.



Esto implica que no es posible transmitir una señal a una velocidad mayor que c , porque para algún observador la señal sería recibida antes de ser emitida. O sí?





$$v_{app} = \frac{v \sin \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi} \quad (20)$$

$v_{app} > c$ cuando

$$\frac{v}{c} > \frac{1}{\sqrt{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right)} \quad (21)$$

Extensión a tres dimensiones espaciales

En tres dimensiones espaciales, el operador de ondas es

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (22)$$

- ▶ Si la velocidad $\mathbf{V} = V \mathbf{I}$, entonces definimos $y' = y$, $z' = z$, y hacemos una transformación $1d$ para pasar de (ct, x) a (ct', x') .
- ▶ Si $\mathbf{V} \neq V \mathbf{I}$, primero hacemos una rotación en el espacio, y la llevamos al caso anterior.

La ecuación de ondas es invariante de forma ante

- ▶ Cambios de referencial.
- ▶ Rotaciones en el espacio.
- ▶ Inversión temporal.
- ▶ Inversión espacial.

Estas transformaciones y sus composiciones forman el *grupo de Lorentz*. Si agregamos las

- ▶ Traslaciones en el espacio.

obtenemos el *grupo de Poincaré*

Y Maxwell?



Gary Brown, <https://www.sciencephoto.com/contributor/gbo/>

Para estudiar bajo qué transformaciones la teoría de Maxwell es invariante de forma, conviene introducir los potenciales escalar y vector

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}\tag{23}$$

Esta transformación reduce las ecuaciones de Maxwell homogéneas a identidades

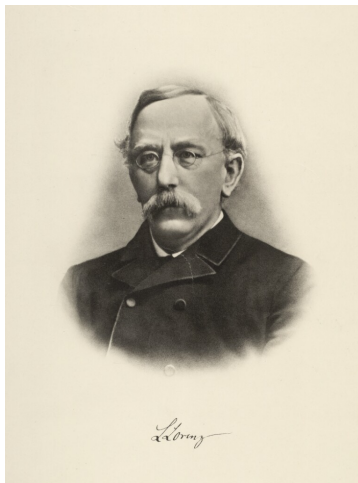
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times (\nabla \varphi) - \frac{1}{c} \left[\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \right] \mathbf{A} \\ &= 0\end{aligned}\tag{24}$$

Y las inhomogéneas dan (en vacío)

$$\begin{aligned}\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -4\pi\rho \\ \nabla \left[\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right] - \Delta\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\end{aligned}\quad (25)$$

Por conveniencia, adoptamos el gauge de Lorenz

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (26)$$



Ludvig Lorenz (1829–1891)

Con lo cual desacoplamos las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi &= 4\pi \rho \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}\end{aligned}\tag{27}$$

y obtenemos también la conservación de la carga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0\tag{28}$$

Consideremos un cambio de referencial con velocidad $\mathbf{V}$ en la dirección de las x . Sabemos que si adoptamos la transformación de Lorentz, los operadores de ondas en la ecuación (27) son invariantes de forma.

Si tratamos a los potenciales como escalares, perdemos la invariancia de forma del gauge de Lorenz. Para recuperarla, todavía podemos introducir una transformación

$$\begin{pmatrix} \varphi' \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} (t', x') = \Lambda \begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} (t, x) \quad (29)$$

donde Λ es una matriz de 4×4 , si simultáneamente transformamos

$$\begin{pmatrix} c\rho' \\ j'_x \\ j'_y \\ j'_z \end{pmatrix} (t', x') = \Lambda \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} (t, x) \quad (30)$$

Para determinar la matriz Λ , vamos a pedir que la condición de gauge (26) también sea invariante de forma. Podríamos hacer el mismo análisis pidiendo la invariancia de forma de la conservación de la carga.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \nabla' \cdot \mathbf{A}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (31)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} ct &= \gamma \left[ct' + \frac{V}{c} x' \right] \\ x &= \gamma [x' + Vt'] \\ y &= y', \quad z = z' \end{aligned} \tag{32}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} &= \gamma \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{V}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x'} &= \gamma \frac{V}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{33}$$

Entonces

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \quad \frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial y'} \quad \frac{\partial}{\partial z'} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) L \quad (34)$$

donde L es la matriz de 4×4

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Para que el gauge de Lorenz sea invariante de forma, es necesario que

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} & \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \varphi' \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} \\
= & \left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) L \wedge \begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \\
= & \left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{36}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, necesitamos que $L \Lambda = \mathbf{1}$, o

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{V}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Explícitamente

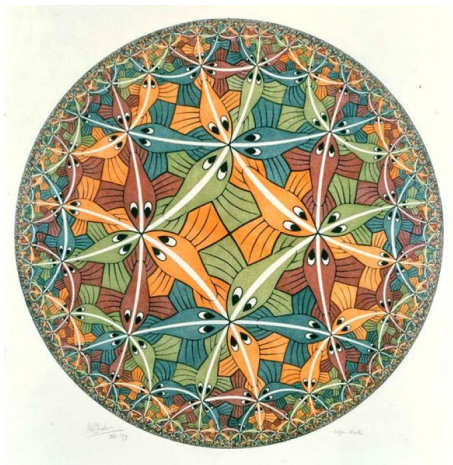
$$\begin{aligned}\varphi' &= \gamma \left[\varphi - \frac{V}{c} A_x \right] \\ A'_x &= \gamma \left[A_x - \frac{V}{c} \varphi \right] \\ A'_y &= A_y, \quad A'_z = A_z\end{aligned}\tag{38}$$

LA LEY DE TRANSFORMACIÓN DE LOS POTENCIALES ES IDENTICA A LA DE LAS COORDENADAS ($ct, \mathbf{x}$)!

Si creemos que las leyes del electromagnetismo son invariantes de forma frente a cambios de referencial, entonces debemos adoptar las transformaciones de Lorentz como la manera correcta de pasar de un referencial a otro.

Esto implica que la velocidad c es la misma para todos los observadores inerciales, y también la velocidad máxima para la transmisión de información.

La próxima clase vamos a continuar explorando la teoría, ahora adoptando el formalismo de Minkowski.



M. C. Escher, *Límite Circular III* (1959)