RELATIVIDAD II

G. Gamow, *Gravity* (Anchor Books, New York (1962))

En esta clase vamos a considerar que el espacio-tiempo es $\mathbf{R}^4$ y sólo nos vamos a ocupar de cambios de coordenadas lineales

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1}$$

$\mu, \nu = 0, \ldots 3$, $x^0 = ct$ y aplicamos la convención de Einstein

$$\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda^\mu{}_0 x^0 + \Lambda^\mu{}_1 x^1 + \Lambda^\mu{}_2 x^2 + \Lambda^\mu{}_3 x^3 \tag{2}$$

Un vector *contravariante* se transforma de la misma manera que las coordenadas

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu} \tag{3}$$

Un vector *covariante* se transforma con la matriz inversa

$$k'_{\mu} = k_{\nu} \left[\Lambda^{-1}\right]^{\nu}{}_{\mu} \tag{4}$$

Un tensor $T^{\mu_1 \cdots \mu_n}_{\nu_1 \ldots \nu_m}$ se transforma como el producto de n vectores contravariantes y m covariantes. La contracción de un índice contravariante con uno covariante da como resultado una cantidad invariante

$$k'_{\mu} x'^{\mu} = k_{\nu} \left[\Lambda^{-1}\right]^{\nu}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} x^{\rho} = k_{\mu} x^{\mu} \tag{5}$$

El tensor métrico es un tensor dos veces covariante

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

El intervalo entre dos eventos separados por una distancia infinitesimal

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \tag{7}$$

es invariante.

La contracción de un vector contravariante con el tensor métrico da como resultado un vector covariante

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \tag{8}$$

es decir $A_0 = -A^0$, $A_i = A^i$. A^μ y A_μ se consideran las componentes contra y covariantes de un mismo objeto.
Se define

$$\eta^{\mu\nu} = \left[\eta^{-1}\right]^{\mu\nu} \tag{9}$$

de modo que $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$.
Las componentes mixtas del tensor métrico son el tensor identidad

$$\eta^\mu_\nu = \eta^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{10}$$

TODOS LOS OBSERVADORES INERCIALES PERCIBEN EL MISMO TENSOR METRICO.

Por lo tanto, las transformaciones que convierten las coordenadas de un sistema inercial en las de otro dejan invariante el tensor métrico

$$\eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\mu'} L^{\nu}{}_{\nu'} \tag{11}$$

o, en notación matricial

$$\eta = L^T \eta L \tag{12}$$

EL GRUPO DE LORENTZ

Las matrices L forman un grupo.

Como las matrices L forman un continuo, para investigar cuál es su forma basta estudiar transformaciones infinitesimales

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu} \tag{13}$$

$$\epsilon^{T}\eta + \eta\epsilon = 0 \tag{14}$$

Las transformaciones finitas se obtienen por exponenciación

$$L^{\mu}{}_{\nu} = [e^{\epsilon}]^{\mu}{}_{\nu} \tag{15}$$

Llamemos $\epsilon_0^0 = \epsilon$, $\epsilon^0{}_j = \chi_j$, $\epsilon^i{}_0 = \chi'^i$

$$\epsilon^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \epsilon & \chi_j \\ \chi'^i & \epsilon^i{}_j \end{pmatrix} \tag{16}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \epsilon &= 0 \\ \chi'^i &= \chi_i \\ \epsilon^i{}_j &= -\epsilon^j{}_i \end{aligned} \tag{17}$$

Reconocemos que una transformación de Lorentz queda definida por 6 parámetros independientes.

Las transformaciones de Lorentz con $\chi^i = 0$ son rotaciones en el espacio tridimensional. Si llamamos

$$\epsilon^i{}_j = \epsilon^i{}_{kj}\omega^k \tag{18}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \\ x'^i &= x^i + \epsilon^i{}_{kj}\omega^k x^j \end{aligned} \tag{19}$$

o $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \vec{\omega} \times \mathbf{x}$, que es una rotación alrededor del eje $\hat{\omega}$ con ángulo ω.

Las transformaciones de Lorentz con $\epsilon^i{}_j = 0$ son cambios de referencial. Para ver esto, pongamos $\chi^i = \chi\mathbf{I}$. Entonces

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 + \chi\, x \\ x' &= x + \chi\, x^0 \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{20}$$

Exponenciando esta transformación obtenemos la transformación finita

$$\begin{aligned} x'^0 &= \cosh\chi\, x^0 + \sinh\chi\, x \\ x' &= \sinh\chi\, x^0 + \cosh\chi\, x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{21}$$

Pidiendo que la recta (ct, Vt) se transforme en $(ct', 0)$ encontramos $\tanh\chi = -V/c$. Entonces

$$\begin{aligned} \cosh\chi &= \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\chi}} = \gamma \\ \sinh\chi &= \frac{\tanh\chi}{\sqrt{1-\tanh^2\chi}} = -\gamma\frac{V}{c} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{23}$$

La composición de dos cambios de referencial con velocidades no colineales es un cambio de referencial compuesto con una rotación (alrededor del eje perpendicular a ambas velocidades).

TIEMPO PROPIO

Consideremos una partícula que se desplaza con velocidad $\mathbf{v}$ en un referencial S. En un lapso dt tenemos $dx^0 = cdt$, $d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$. En el referencial en el que la partícula está instantáneamente en reposo tenemos $dx'^0 = cd\tau$, $d\mathbf{x}' = 0$. Por la invariancia del intervalo, debe ser

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (24)$$

τ es el *tiempo propio* de la partícula. Obsérvese que siempre $dt \geq d\tau$.

TETRAVELOCIDAD

Las componentes de la velocidad ordinaria **v** no definen un vector en el espacio-tiempo. Definimos en cambio la *tetravelocidad*

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{cd\tau} \tag{25}$$

Entonces las componentes contravariantes de la tetravelocidad son

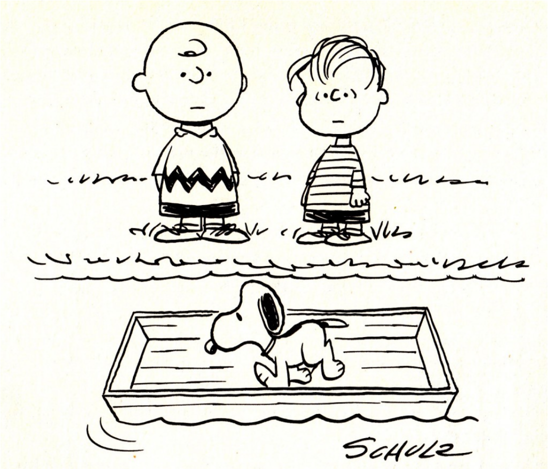
$$u^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \tag{26}$$

y sus componentes covariantes son

$$u_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(-1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \tag{27}$$

Obsérvese que u^{μ} es adimensional y siempre $u^2 = u_{\mu}u^{\mu} = -1$. La velocidad ordinaria puede recuperarse como $v^i = c\left(u^i/u^0\right)$.

COMPOSICION DE VELOCIDADES



Si miramos una partícula con velocidad $\mathbf{v}$ en el sistema S', que se mueve con velocidad $\mathbf{V} = V\mathbf{I}$ respecto de S, tenemos

$$
\begin{aligned}
u^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(u'^0 + \frac{V}{c}u'^1\right) = \frac{u'^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right) \\
u^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\frac{V}{c}u'^0 + u'^1\right) = \frac{u'^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{(v'_x + V)}{c} \\
u^2 &= u'^2 \\
u^3 &= u'^3
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Por lo tanto la velocidad en el sistema S es

$$\begin{aligned} v_x &= c\frac{u^1}{u^0} = \frac{(v'_x + V)}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)} \\ v_y &= c\frac{u^2}{u^0} = v'_y\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)} \\ v_z &= c\frac{u^3}{u^0} = v'_z\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)} \end{aligned} \tag{29}$$

TETRAACELERACIÓN

La *tetraaceleración* de la partícula es

$$a^{\mu} = c\frac{du^{\mu}}{d\tau} \tag{30}$$

Por la condición $u^2 = -1$ debemos tener siempre

$$u_{\mu}a^{\mu} = 0 \tag{31}$$

Por ejemplo, supongamos que $u^2 = u^3 = 0$. Entonces podemos parametrizar $u^0 = \cosh\chi$, $u^1 = \sinh\chi$, y

$$
\begin{aligned}
a^0 &= c \sinh\chi \, \frac{d\chi}{d\tau} \\
a^1 &= c \cosh\chi \, \frac{d\chi}{d\tau}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

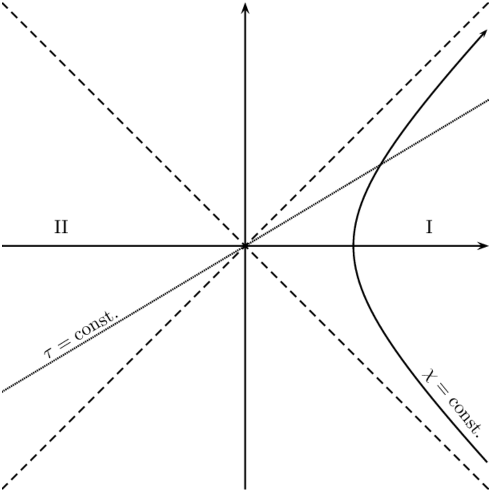
Decimos que la aceleración es constante si $a^2 = c^2 \left(d\chi/d\tau\right)^2$ es constante. Entonces $\chi = a\tau/c$, y

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{c}{a} \sinh \frac{a\tau}{c} \\
x &= \frac{c^2}{a} \cosh \frac{a\tau}{c}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

o bien

$$x = \frac{c^2}{a}\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \tag{34}$$

Cuando $|t| \to \infty$, $x \to c\,|t|$



RELATIVIDAD Y FENOMENOS ONDULATORIOS

Debido a la invariancia de forma de la ecuación de ondas, si en el sistema S tenemos una onda plana

$$\psi\left(t, \mathbf{x}\right) = e^{i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t\right)} \tag{35}$$

Entonces en el sistema S'

$$\psi'\left(t', \mathbf{x}'\right) = \psi\left(t, \mathbf{x}\right) \tag{36}$$

También puede escribirse como

$$\psi'\left(t', \mathbf{x}'\right) = e^{i\left(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}' - \omega' t'\right)} \tag{37}$$

Reconocemos entonces que el tetravector *número de onda*

$$k^{\mu} = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) \tag{38}$$

efectivamente define un vector contravariante.

EFECTO DOPPLER

En el sistema S' la frecuencia de la onda es

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\omega - Vk_x\right) \tag{39}$$

como $k_x = (\omega/c)\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{V}$ y $\mathbf{k}$,

$$\omega' = \omega\frac{\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{40}$$

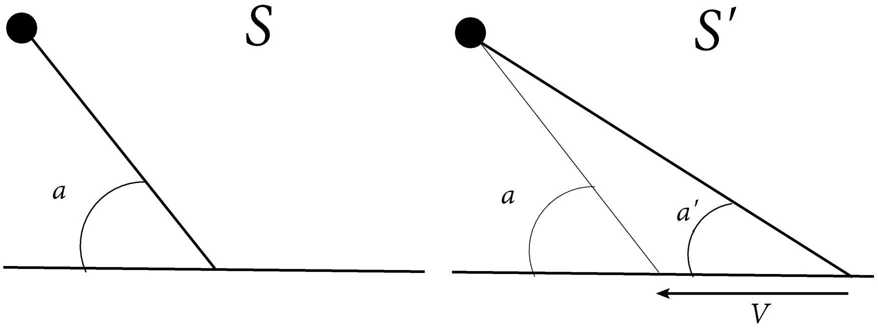
El efecto Doppler no relativista se basa en la observación de que, si empleamos la transformación de Galileo,

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t = \mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{x}' + \mathbf{V}t\right) - \omega t \tag{41}$$

y por lo tanto $\omega' = \omega\left(1 - (V/c)\cos\theta\right)$.

ABERRACION DE LA LUZ

Una fuente de luz subtiende un ángulo a en el sistema S y a' en el sistema S'. La pregunta es cuál es la relación entre a, a' y V.



En un análisis no relativista, diríamos que la luz viaja con velocidad

$$v = c\,(\cos\ a\,\mathbf{I} - \sin\ a\,\mathbf{J}) \tag{42}$$

en el sistema S, y por lo tanto con velocidad

$$v = (c\cos\ a + V)\ \mathbf{I} - c\sin\ a\,\mathbf{J} \tag{43}$$

en S', por lo cual

$$\tan\ a' = \frac{\sin\ a}{\left(\cos\ a + \frac{V}{c}\right)} \tag{44}$$

En el análisis relativista, decimos que la luz tiene un vector número de onda

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\left(\cos\ a\,\mathbf{I} - \sin\ a\,\mathbf{J}\right) \tag{45}$$

en el sistema S. En el sistema S'

$$\begin{aligned} k_x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(k_x + \frac{V\omega}{c^2}\right) \\ k_y' &= k_y \end{aligned} \tag{46}$$

Por lo tanto

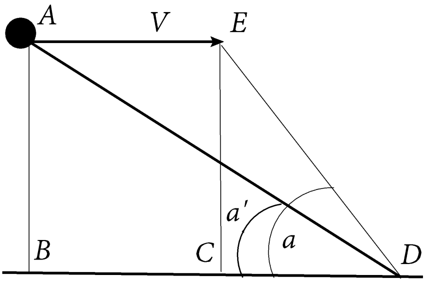
$$\tan\ a' = \frac{k_y'}{k_y'} = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,\frac{\sin\ a}{\left(\cos\ a + \frac{V}{c}\right)} \tag{47}$$

En 1739, Euler escribió un análisis del problema de la aberración de la luz, en la que rechazaba el análisis galileano *porque la luz debía propagarse con velocidad c tanto en S como en S'*[1].

Leonhard Euler (1707–1783)

[1] Amitabha Ghosh, *Conceptual Evolution of Newtonian and Relativistic Mechanics* (Springer, Singapur (2018))

Además, Euler usa explícitamente el principio de relatividad, afirmando que *la aberración que percibe un observador móvil de un emisor estacionario, es la misma que la que percibe un observador estacionario de un objeto móvil*. Euler desarrolla un modelo en el que la aberración se produce por el desplazamiento del emisor durante el tiempo de vuelo de la luz



$$
\begin{aligned}
\bar{A}D &= ct \\
\bar{A}E = \bar{B}C &= Vt \\
\bar{A}B = \bar{E}C &= ct \sin\ a' \\
&= \bar{E}D \sin\ a \\
\bar{B}D &= ct \cos\ a' \\
\bar{C}D &= \bar{E}D \cos\ a
\end{aligned} \tag{48}
$$

por lo tanto

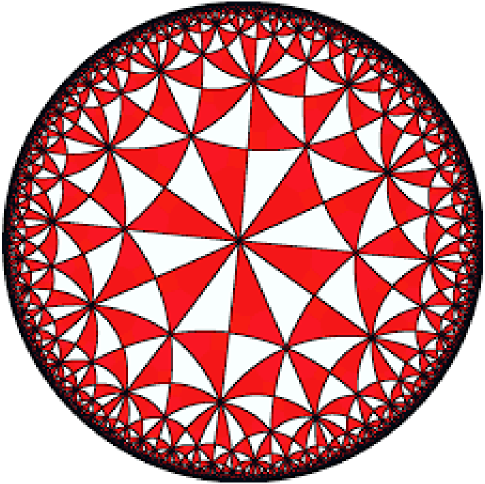
$$
\begin{aligned}
\bar{E}D \sin\ a &= ct \sin\ a' \\
\bar{E}D \cos\ a &= ct \cos\ a' - Vt
\end{aligned} \tag{49}
$$

y de ahí

$$
\tan\ a = \frac{sin\ a'}{\cos\ a' - \frac{V}{c}} \tag{50}
$$

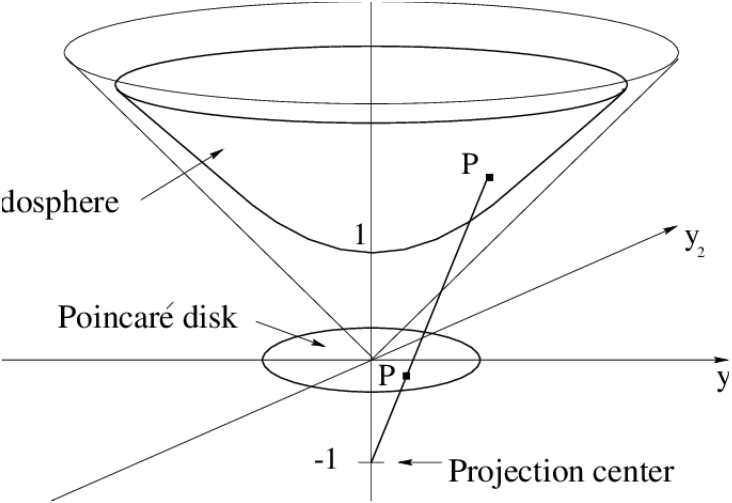
Los tres modelos coinciden a primer orden en V/c.

EL DISCO DE POINCARE[2]

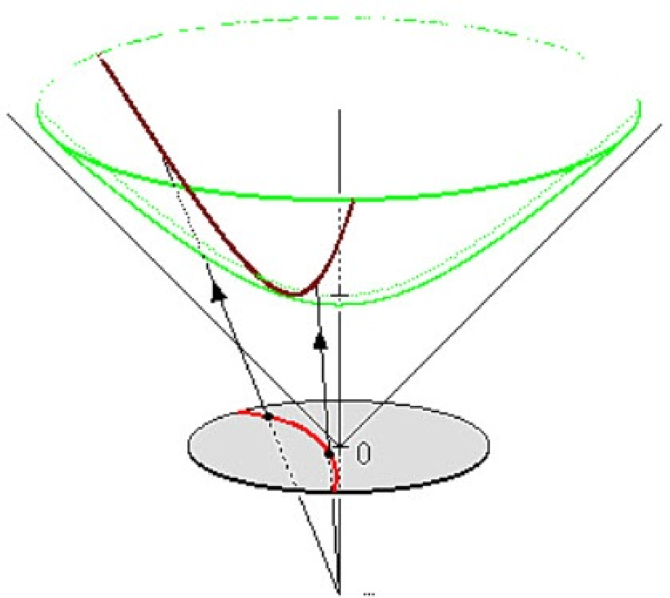


[2] N. L. Balasz and A. Voros, *Chaos on the pseudosphere*, Physics Reports 143, 109–240 (1986)

El disco de Poincaré resulta de proyectar la superficie $c^2t^2 - x^2 - y^2 = 1$, en un espacio de Minkowski de tres dimensiones, sobre el disco unidad en el plano $ct = 0$,



Los arcos de círculo son las proyecciones de la intersección entre el hiperboloide y un plano



La próxima clase vamos a ver cómo acoplar una partícula relativista al campo electromagnético.