MECANICA RELATIVISTA

"Now that desk looks better. Everything's squared away, yessir, squaaaaaared away."

LAGRANGIANOS Y HAMILTONIANOS

Una de las formas más potentes de describir un sistema físico es mediante el *formalismo lagrangiano*. Las configuraciones del sistema se describen mediante *coordenadas generalizadas* $q^\alpha(t)$. La dinámica del sistema está encriptada en el *Lagrangiano* L. Con el Lagrangiano se construye la *acción*

$$S = \int_{t_A}^{t_B} dt\, L\left[q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t\right] \qquad (1)$$

La trayectoria que sigue el sistema para pasar de una configuración q_A^α en el instante t_A a la configuración q_B^α en el instante t_B es la que minimiza la acción, de donde las *ecuaciones de Lagrange*

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \tag{2}$$

donde

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \tag{3}$$

es el *impulso* conjugado a la variable q^α.

Por ejemplo, para la partícula libre las q^α son las componentes del vector posición $\mathbf{x}$, las $\dot{q}^\alpha$ son las componentes de la velocidad $\mathbf{v}$, el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \tag{4}$$

por lo tanto el impulso es

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{5}$$

y las ecuaciones de Lagrange se convierten en las de Newton

$$\dot{\mathbf{p}} = 0 \tag{6}$$

En el formalismo Hamiltoniano, los p_α son considerados variables independientes. Se define el Hamiltoniano

$$H = p_\alpha \dot{q}^\alpha - L \tag{7}$$

La acción

$$S = \int_{t_A}^{t_B} dt \ \{p_\alpha \dot{q}^\alpha - H\} \tag{8}$$

se minimiza respecto a variaciones *independientes* de las coordenadas e impulsos, de donde resultan las *ecuaciones de Hamilton*

$$\begin{aligned} \frac{dq^\alpha}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \frac{dp_\alpha}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \end{aligned} \tag{9}$$

Para la partícula libre $H = \mathbf{p}^2/2m$.

LA PARTICULA CARGADA

La manera más simple de introducir el acoplamiento al campo electromagnético es mediante el *acoplamiento mínimo*. Adoptando el gauge axial $\varphi = 0$, definimos el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \tag{10}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{1}{m}\left(p^i - \frac{e}{c}A^i\right) \\ \dot{p}_i &= \frac{e}{mc}\left(p^j - \frac{e}{c}A^j\right)A_{j,i} = \frac{e}{c}v^j A_{j,i} \end{aligned} \tag{11}$$

Nótese que $\mathbf{p} \neq m\mathbf{v}$.

De la primera ecuación de Hamilton encontramos

$$\ddot{x}^i = \frac{1}{m}\left(\frac{dp^i}{dt} - \frac{e}{c}\frac{dA^i}{dt}\right) \tag{12}$$

Para dp^i/dt tenemos la segunda ecuación, y para dA^i/dt usamos la derivada convectiva

$$\frac{dA^i}{dt} = \frac{\partial A^i}{\partial t} + v^j A^i{}_{,j} \tag{13}$$

Entonces

$$m\ddot{x}_i = -\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c} v^j \left(A_{j,i} - A_{i,j}\right) \tag{14}$$

pero en el gauge axial

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} &= E_i \\ v^j\left(A_{j,i} - A_{i,j}\right) &= v^j \epsilon_{ijk} B^k = (\mathbf{v}\times\mathbf{B})_i \end{aligned} \tag{15}$$

de donde reconocemos que (14) representa la fuerza de Lorentz.

LA PARTICULA LIBRE RELATIVISTA

En el caso de la partícula libre relativista, la acción es

$$S = -mc \int_A^B c d\tau \tag{16}$$

donde τ es el tiempo propio

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \tag{17}$$

Para tener algo que variar, introducimos un parámetro arbitrario σ y escribimos

$$S = -mc \int_A^B d\sigma \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} \tag{18}$$

Los momentos conjugados a las coordenadas son

$$p_\mu = mc \frac{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\sigma}}{\sqrt{-\eta_{\rho\lambda}\frac{dx^\rho}{d\sigma}\frac{dx^\lambda}{d\sigma}}} \tag{19}$$

y obedecen

$$p_\mu p^\mu = -m^2c^2 \tag{20}$$

El parámetro σ es arbitrario; si elegimos como parámetro el tiempo coordenado t, entonces

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{21}$$

Si en cambio elegimos como parámetro el tiempo propio τ, vemos que

$$p^\mu = mc\, u^\mu \tag{22}$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{d\sigma}p^\mu = mc\frac{d}{d\sigma}u^\mu = 0 \tag{23}$$

En el límite no relativista **p** se convierte en el momento ordinario y

$$cp^0 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \tag{24}$$

se puede identificar con la energía.

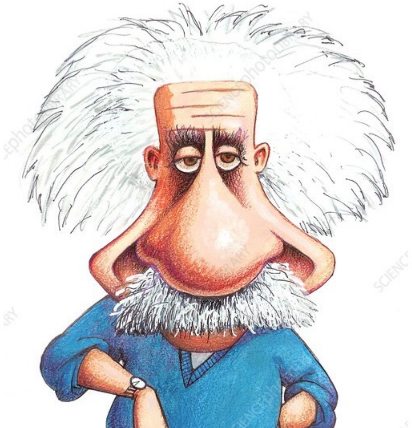
Para acoplar la partícula a un campo electromagnético necesitamos el Hamiltoniano, pero, si

$$L = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}} \tag{25}$$

entonces

$$H = p_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} - L = 0 \tag{26}$$

https://www.sciencephoto.com/media/431666/view



El tema es que las componentes del impulso no son independientes, ya que deben satisfacer el vínculo (20). Para asegurar que el vínculo sea respetado, introducimos un multiplicador de Lagrange en la acción

$$S = \int_A^B d\sigma \, \left\{ p_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} - \frac{N}{2} \left[p^2 + m^2 c^2 \right] \right\} \tag{27}$$

Entonces las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\sigma} &= Np^\mu \\ \frac{dp^\mu}{d\sigma} &= 0 \\ p^2 &= -m^2 c^2 \end{aligned} \tag{28}$$

La teoría es invariante frente a la elección del parámetro σ: si cambiamos σ por σ', entonces

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\sigma'} &= \frac{d\sigma}{d\sigma'}\frac{dx^\mu}{d\sigma} = \frac{d\sigma}{d\sigma'}Np^\mu = N'p^\mu \\ \frac{dp_\mu}{d\sigma'} &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

Por lo tanto, elegir un parámetro es equivalente a fijar un gauge. En particular, si $\sigma = \tau$, entonces $N = 1/m$.

LA PARTICULA CARGADA

Ahora podemos aplicar la prescripción de acoplamiento mínimo a la partícula relativista. Introduciendo el tetrapotencial $A^{\mu} = (\varphi, \mathbf{A})$, el Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(p - \frac{e}{c}A\right)^2 + m^2c^2\right] \tag{30}$$

Las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} u^{\mu} &= \frac{1}{mc}\left(p^{\mu} - \frac{e}{c}A^{\mu}\right) \\ \frac{dp_{\mu}}{d\tau} &= \frac{e}{mc}\left(p^{\nu} - \frac{e}{c}A^{\nu}\right)A_{\nu,\mu} = eu^{\nu}A_{\nu,\mu} \end{aligned} \tag{31}$$

Usando que

$$\frac{dA^{\mu}}{d\tau} = cu^{\nu} A^{\mu}_{,\nu} \tag{32}$$

encontramos

$$\frac{du_{\mu}}{d\tau} = \frac{e}{mc} u^{\nu} \left[A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \right] \tag{33}$$

donde

$$\begin{aligned} x^0 &= ct \\ d\tau &= \frac{1}{c} ds = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \\ u_{\nu} &= \frac{dx_{\nu}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(-1, \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \end{aligned} \tag{34}$$

En particular, si $\mu = 1, 2, 3$

$$\frac{d}{dt}\frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = e\left\{A_{0,i} - \frac{1}{c}A_{i,t} + \frac{v^j}{c}\left[A_{j,i} - A_{i,j}\right]\right\} \tag{35}$$

como $A_0 = -\varphi$, reconocemos la fuerza de Lorentz. Si $\mu = 0$

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -ev^j\left[A_{j,0} - A_{0,j}\right] = e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} \tag{36}$$

es la ecuación de la conservación de la energía de la partícula.

FORMULACION COVARIANTE

La ecuación (33) se puede poner de manera explícitamente covariante

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = eF_{\mu\nu}u^\nu \tag{37}$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor antisimétrico

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \tag{38}$$

En términos de los campos tridimensionales

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

TRANSFORMACION DE LOS CAMPOS

El carácter tensorial de $F_{\mu\nu}$ determina la ley de transformación de los campos

$$F'_{\mu'\nu'}\left(x'\right) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu'}} F_{\mu\nu}\left(x\right) \tag{40}$$

Para un cambio del referencial S al referencial S' moviéndose con velocidad V en la dirección x, con $a, b = y, z$

$$\begin{aligned}
F'_{00} &= F'_{ii} = 0 \\
F'_{ab} &= F_{ab} \\
F'_{a0} &= -F'_{0a} = \gamma\left[F_{a0} + \frac{V}{c}F_{ax}\right] \\
F'_{xa} &= -F'_{a0} = \gamma\left[F_{xa} + \frac{V}{c}F_{0a}\right] \\
F'_{0x} &= -F'_{x0} = \left[\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} - \frac{\partial x^1}{\partial x'^0}\frac{\partial x^0}{\partial x'^1}\right] F_{0x} = F_{0x}
\end{aligned} \tag{41}$$

En términos de los campos, vemos que E_x y B_x son invariantes, mientras que

$$\begin{aligned} E'_y &= \gamma\left[E_y - \frac{V}{c}B_z\right], \quad E'_z = \gamma\left[E_z + \frac{V}{c}B_y\right] \\ B'_z &= \gamma\left[B_z - \frac{V}{c}E_y\right], \quad B'_y = \gamma\left[B_y + \frac{V}{c}E_z\right] \end{aligned} \tag{42}$$

o

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_\perp &= \gamma\left[\mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{B}_\perp\right] \\ \mathbf{B}'_\perp &= \gamma\left[\mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{E}_\perp\right] \end{aligned} \tag{43}$$

que cuando $\gamma \to 1$ reproducen la ley de transformación no relativista de la clase 12.

INVARIANTES
Como la contracción de un índice covariante y otro contravariante da como resultado un escalar, es claro que $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ son invariantes. $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo completamente antisimétrico con $\epsilon^{0123} = 1$.
En términos de los campos

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 2\left[-E^2 + B^2\right] \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} &= -4\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \end{aligned} \tag{44}$$

Si $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} < (>)\,0$, **E** (**B**) no puede anularse en ningún referencial. Si **E** y **B** son perpendiculares en algún referencial, entonces son perpendiculares en todos los referenciales.
Obsérvese que

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = 2\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu F_{\rho\sigma}\right] \tag{45}$$

ECUACIONES DE MAXWELL EN VACIO

Se ve por reemplazo directo que las ecuaciones de Maxwell homogéneas

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{46}$$

se pueden escribir en forma explícitamente covariante como

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho,\sigma} = 0 \tag{47}$$

Mientras que las inhomogéneas

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{48}$$

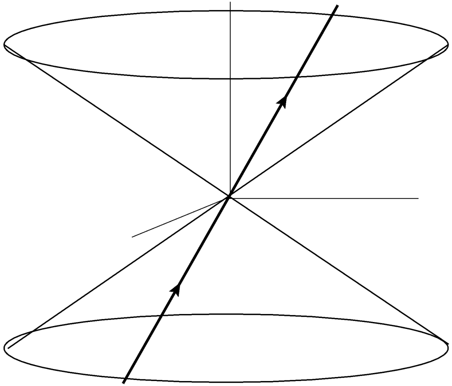
se escriben como

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^{\mu} \tag{49}$$

donde $j^{\mu} = (c\rho, \mathbf{j})$ es el tetravector densidad de corriente.

CAMPOS DE UNA CARGA EN MOVIMIENTO

Consideremos una carga e moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$ en la dirección x. En el referencial en reposo de la carga tenemos $A'^{\mu} = (\varphi', \mathbf{0})$, con $\varphi' = e/r$. También tenemos $\mathbf{B}' = 0$, $\mathbf{E} = e\mathbf{x}/r^3$. Por lo tanto $F'^{0i} = -F'^{i0} = E^i$; todos los otros elementos de $F'^{\mu\nu}$ son cero.



Para encontrar los potenciales y los campos en el referencial en reposo, es suficiente identificar un vector y un tensor antisimétrico que adoptan la forma requerida en el referencial en reposo. En éste, la tetravelocidad $u'^{\mu} = (1, \mathbf{0})$, por lo tanto $ct' = -u'_{\mu} x'^{\mu}$. Se deduce que el vector espacial

$$x_T^{\mu} = x^{\mu} + u^{\mu} u_{\nu} x^{\nu} \tag{50}$$

en el referencial en reposo se convierte en $x'^{\mu} = (0, \mathbf{x})$. Los potenciales y campos que estamos buscando son

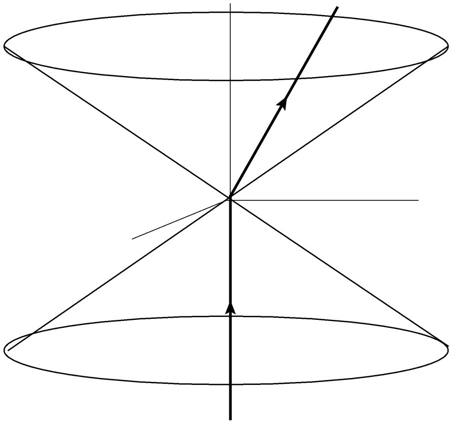
$$\begin{aligned} A^{\mu} &= \frac{e u^{\mu}}{\left[\eta_{\rho\sigma} x_T^{\rho} x_T^{\sigma}\right]^{1/2}} \\ F^{\mu\nu} &= \frac{e\left[u^{\mu} x^{\nu} - u^{\nu} x^{\mu}\right]}{\left[\eta_{\rho\sigma} x_T^{\rho} x_T^{\sigma}\right]^{3/2}} \end{aligned} \tag{51}$$

Observamos que

$$\eta_{\rho\sigma} x_T^\rho x_T^\sigma = x^2 + (ux)^2 = \mathbf{x}^2 - c^2 t^2 + \frac{\left(ct - \frac{1}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (52)$$

$$\begin{aligned}
A^0 &= \varphi = \frac{e\gamma}{\left[\eta_{\rho\sigma} x_T^\rho x_T^\sigma\right]^{1/2}} \\
A^i &= \frac{e\gamma}{c\left[\eta_{\rho\sigma} x_T^\rho x_T^\sigma\right]^{1/2}} v^i \\
F^{0i} &= E^i = \frac{e\gamma}{\left[\eta_{\rho\sigma} x_T^\rho x_T^\sigma\right]^{3/2}} \left[x^i - v^i t\right] \\
F^{ij} &= \epsilon^{ijk} B_k = \frac{e\gamma}{c\left[\eta_{\rho\sigma} x_T^\rho x_T^\sigma\right]^{3/2}} \left[v^i x^j - v^j x^i\right] \qquad (53)
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que la partícula estaba en reposo para $t \leq 0$ y se acelera instantáneamente para alcanzar la velocidad $\mathbf{v}$ para $t \geq 0$. Un observador a distancia r del origen ve a la partícula en reposo si $ct \leq r$, y ve a la partícula en movimiento si $ct \geq r$.



Para este observador

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_v}\, \theta\,(ct - r) \tag{54}$$

donde $\mathbf{A_v}$ es el potencial de una carga con velocidad $\mathbf{v}$. En consecuencia

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_v}\, \theta\,(ct - r) - \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A_v}\, \delta\,(ct - r) \tag{55}$$

El primer término corresponde al *campo cercano* y decae como $1/r^2$. El segundo término es el *campo de radiación* y decae como $1/r$, por lo cual alcanza distancias mucho mayores que el campo cercano.
Se ve por inspección que el campo de radiación es una superposición de ondas planas propagándose radialmente y por lo tanto transporta energía y cantidad de movimiento.

CAMPOS EN MEDIOS EN MOVIMIENTO[1]

Vamos a deducir las relaciones constitutivas adecuadas a un medio homogéneo moviéndose rígidamente con velocidad **V.** Las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas tienen la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c}(c\rho)\,, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{56}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir conjuntamente como

$$G^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^{\mu} \tag{57}$$

donde

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & H_z & -H_y \\ -D_y & -H_z & 0 & H_x \\ -D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

---

[1] W. Pauli, *Theory of Relativity* (Pergamon Press, Londres (1958))

Como sabemos que $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ es un tetravector, se deduce que $G^{\mu\nu}$ es un tensor, y por lo tanto, si S' es el referencial en el que el medio está en reposo

$$
\begin{aligned}
E_{||} &= E'_{||}, \;\; B_{||} = B'_{||}, \;\; D_{||} = D'_{||}, \;\; H_{||} = H'_{||} \\
\mathbf{E}'_\perp &= \gamma \left[\mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{B}_\perp \right], \;\; \mathbf{B}'_\perp = \gamma \left[\mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{E}_\perp \right] \\
\mathbf{D}'_\perp &= \gamma \left[\mathbf{D}_\perp + \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{H}_\perp \right], \;\; \mathbf{H}'_\perp = \gamma \left[\mathbf{H}_\perp - \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{D}_\perp \right]
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Al escribir las ecuaciones de Maxwell en el medio en movimiento, es conveniente reemplazar las derivadas parciales respecto al tiempo por derivadas convectivas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{du_i}{dt} - V^j u_{i,j} \\ &= \frac{du_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial x^j}\left[V^j u_i - u^j V_i\right] - V^i u^j_{,j} \end{aligned} \tag{60}$$

o directamente

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{u}) - \mathbf{V}\nabla \cdot \mathbf{u} \tag{61}$$

Entonces la Ley de Faraday se vuelve

$$\nabla \times \mathbf{E}^* + \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0$$
$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{B} \tag{62}$$

que por supuesto es la fuerza por unidad de carga sobre una partícula en reposo en el medio, y la Ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H}^* - \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{4\pi}{c}\left[\mathbf{j} - \mathbf{V}\rho\right]$$
$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} - \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{D} \tag{63}$$

La ley de transformación de los campos

$$
\begin{aligned}
E^*_{||} &= E^{*\prime}_{||}, \;\; B_{||} = B'_{||}, \;\; D_{||} = D'_{||}, \;\; H^*_{||} = H^{*\prime}_{||} \\
\mathbf{E}^{*\prime}_{\perp} &= \gamma \mathbf{E}^*_{\perp}, \;\; \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left[\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp} \right] \\
\mathbf{D}'_{\perp} &= \gamma \left[\mathbf{D}_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{H}_{\perp} \right], \;\; \mathbf{H}^{*\prime}_{\perp} = \gamma \mathbf{H}^*_{\perp}
\end{aligned} \tag{64}
$$

Si en el sistema en reposo valen las relaciones constitutivas usuales $\mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}^{*\prime}$, $\mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}^{*\prime}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{D} &= \epsilon \left[\mathbf{E}^* - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}^* \right) \right] - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}^* \\
\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{B} &= \mu \left[\mathbf{H}^* - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}^* \right) \right] + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}^*
\end{aligned} \tag{65}
$$

Las condiciones de contorno en la interfase entre dos medios que se mueven con la *misma* velocidad (o si uno de ellos es el vacío) se obtienen transformando al sistema en reposo, donde las componentes tangenciales de $\mathbf{E}^*$ y $\mathbf{H}^*$, y las normales de $\mathbf{D}$ y $\mathbf{B}$, son continuas.

Si la velocidad es tangente a la interfase, entonces estas condiciones de contorno son independientes de la velocidad del medio.[2]

[2] J. van Bladel, *Relativity and Engineering* (Springer, Berlín (1984))

La clase que viene empezamos a estudiar problemas que involucran radiación de ondas electromagnéticas.