

# SISTEMAS RADIANTES SIMPLES



## POTENCIAL GENERADO POR UNA DISTRIBUCION ACOTADA DE CORRIENTES

En el gauge de Lorenz, la ecuación para el potencial vector en vacío

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1)$$

La solución se puede escribir en términos de la función de Green<sup>1</sup>

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}, t] = \frac{4\pi}{c} \int dt' \int d^3x' G[\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'] \mathbf{j}[\mathbf{x}', t'] \quad (2)$$

$G$  es la solución a

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \quad (3)$$

$G = G[\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t']$ . Por causalidad,  $G = 0$  si  $t - t' < c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ .

---

<sup>1</sup>ver la clase 11

Queremos estudiar la radiación de ondas con una frecuencia definida. Entonces es propicio trabajar con la transformada de Fourier de  $G$  respecto al tiempo

$$G[\mathbf{x}, t] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} e^{-i\omega t} G_{\omega}[\mathbf{x}] \quad (4)$$

$G_{\omega}[\mathbf{x}]$  obedece la ecuación

$$\Delta G_{\omega}[\mathbf{x}] + \frac{\omega^2}{c^2} G_{\omega}[\mathbf{x}] = -\delta(\mathbf{x}) \quad (5)$$

La solución que representa sólo ondas salientes es

$$G[\mathbf{x}, t] = \frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} e^{i\omega(r/c-t)} \quad (6)$$

En el gauge de Lorenz, el potencial vector generado por una distribución de corrientes  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  es

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} e^{-i\omega t} \mathbf{A}_{\omega}[\mathbf{x}] \\ &= \frac{4\pi}{c} \int dt' \int d^3x' G[\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'] \mathbf{j}[\mathbf{x}', t'] \\ &= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \int dt' \int d^3x' \frac{e^{i\omega(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c - (t-t'))}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \mathbf{j}[\mathbf{x}', t'] \\ &= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} e^{-i\omega t} \int d^3x' \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \mathbf{j}_{\omega}[\mathbf{x}']\end{aligned}\quad (7)$$

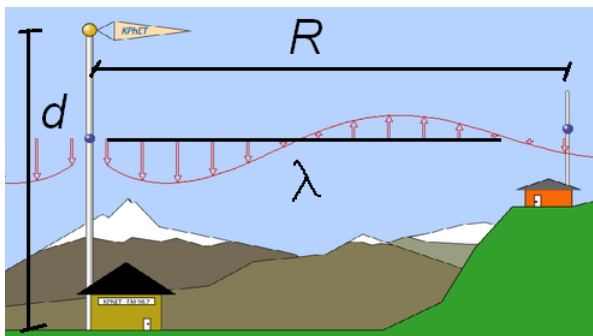
$k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ , de manera que

$$\mathbf{A}_{\omega}[\mathbf{x}] = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \mathbf{j}_{\omega}[\mathbf{x}']\quad (8)$$

En este problema hay tres longitudes características

- ▶ La distancia  $R$  a la fuente,
- ▶ La longitud de onda  $\lambda$  de la radiación, y
- ▶ La dimensión lineal  $d$  característica de la fuente.

Nos interesa el régimen en el que  $R \gg \lambda \gg d$ . Como  $v = \omega d$  es la velocidad característica de las cargas,  $d \ll \lambda$  implica  $v \ll c$ .



En este régimen, podemos aproximar

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx R - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}' \quad (9)$$

$$\mathbf{A}_\omega[\mathbf{x}] = \frac{e^{ikR}}{cR} \mathbf{j}_k \quad (10)$$

donde

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{x}} \quad (11)$$

$$\mathbf{j}_k = \int d^3x' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \mathbf{j}_\omega[\mathbf{x}'] \quad (12)$$

Los campos son

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_\omega &= \nabla \times \mathbf{A}_\omega = i \frac{\omega}{c} \frac{e^{ikR}}{cR} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{j}_k \\ \mathbf{E}_\omega &= \frac{ic}{\omega} \nabla \times \mathbf{B}_\omega \\ &= i \frac{\omega}{c} \frac{e^{ikR}}{cR} \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{j}_k \times \hat{\mathbf{x}})\end{aligned}\quad (13)$$

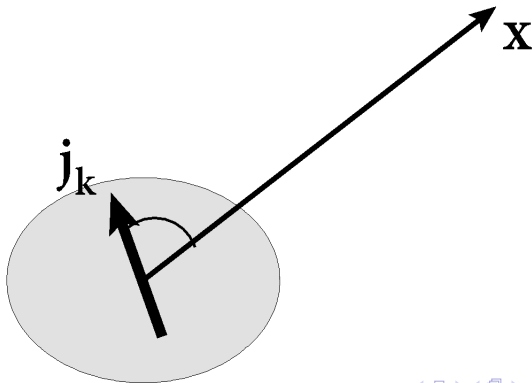
También

$$\mathbf{B}_\omega = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}_\omega \quad (14)$$

El vector de Poynting, promediado en el tiempo, es

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_\omega &= \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_\omega^* \times \mathbf{B}_\omega] \equiv S_\omega \hat{\mathbf{x}} \\ S_\omega &= \frac{1}{8\pi} \frac{\omega^2}{c^3 R^2} (\mathbf{j}_k^* \times \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{j}_k \times \hat{\mathbf{x}})\end{aligned}\quad (15)$$

Como  $S_\omega \propto R^{-2}$ , la potencia  $w[\theta, \varphi] d\Omega = S_\omega R^2 d\Omega$  radiada en un elemento de ángulo sólido  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  es independiente de  $R$ .





## PRIMEROS MOMENTOS MULTIPOLARES

Como además  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' \approx d/\lambda \ll 1$ , podemos desarrollar la exponencial

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \approx 1 + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' + \dots \quad (16)$$

De esa manera obtenemos el *desarrollo multipolar* de la radiación emitida.

## MOMENTO DIPOLAR ELECTRICO

Si directamente aproximamos  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \approx 1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\mathbf{k},D}^p &= \int d^3x' \mathbf{j}_\omega^p[\mathbf{x}'] = \int d^3x' \delta_q^p \mathbf{j}_\omega^q[\mathbf{x}'] \\ &= \int d^3x' \frac{\partial x'^p}{\partial x'^q} \mathbf{j}_\omega^q[\mathbf{x}'] = - \int d^3x' x'^p \nabla \cdot \mathbf{j}_\omega[\mathbf{x}'] \\ &= (-i)\omega \int d^3x' x'^p \rho_\omega[\mathbf{x}'] \end{aligned} \quad (17)$$

donde hemos usado la ecuación de conservación de la carga

$$-i\omega\rho_\omega + \nabla \cdot \mathbf{j}_\omega = 0 \quad (18)$$

Por lo tanto, a este orden

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k},D} = (-i)\omega \mathbf{d}_\omega \quad (19)$$

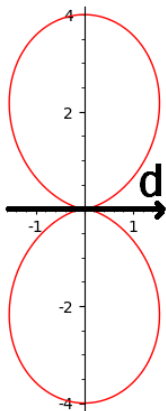
donde  $\mathbf{d}$  es el *momento dipolar eléctrico* de la distribución de carga.

La potencia radiada por unidad de ángulo sólido es

$$w_D = \frac{1}{8\pi} \frac{\omega^4}{c^3} \mathbf{d}_\omega^* \cdot \mathbf{d}_\omega \sin^2 \theta \quad (20)$$

La potencia radiada total es

$$W_D = \frac{\omega^4}{3c^3} \mathbf{d}_\omega^* \cdot \mathbf{d}_\omega \quad (21)$$



## MOMENTO DIPOLAR MAGNETICO

La aproximación siguiente consiste en retener los términos lineales

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \approx 1 + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' \quad (22)$$

El nuevo término en  $\mathbf{j}_{\mathbf{k}}$  es

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k}}^p = i \mathbf{k}_q \int d^3x' \mathbf{x}'^q \mathbf{j}_{\omega}^p [\mathbf{x}'] \quad (23)$$

Escribimos

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k}} = \mathbf{j}_{\mathbf{k},M} + \mathbf{j}_{\mathbf{k},Q} \quad (24)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\mathbf{k};M}^p &= \frac{i}{2} \mathbf{k}_q \int d^3x' (\mathbf{x}'^q \mathbf{j}_{\omega}^p [\mathbf{x}'] - \mathbf{x}'^p \mathbf{j}_{\omega}^q [\mathbf{x}']) \\ \mathbf{j}_{\mathbf{k};Q}^p &= \frac{i}{2} \mathbf{k}_q \int d^3x' (\mathbf{x}'^q \mathbf{j}_{\omega}^p [\mathbf{x}'] + \mathbf{x}'^p \mathbf{j}_{\omega}^q [\mathbf{x}']) \end{aligned} \quad (25)$$

El primer término es el *momento dipolar magnético*, y el segundo es el *momento cuadrupolar eléctrico*.

En el primer término, observamos que

$$\mathbf{x}'^q \mathbf{j}_\omega^p [\mathbf{x}'] - \mathbf{x}'^p \mathbf{j}_\omega^q [\mathbf{x}'] = \epsilon^{rpq} (\mathbf{j}_\omega [\mathbf{x}'] \times \mathbf{x}')_r \quad (26)$$

y

$$\int d^3x' \mathbf{j}_\omega [\mathbf{x}'] \times \mathbf{x}' = 2c \mathbf{m}_\omega \quad (27)$$

es la transformada de Fourier del momento dipolar magnético<sup>2</sup>, por lo tanto

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k},M} = i\omega \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{m}_\omega \quad (28)$$

La radiación tiene el mismo patrón dipolar que el momento dipolar eléctrico, con  $\mathbf{m}$  en vez de  $\mathbf{d}$ . La potencia radiada total es proporcional a  $\omega^4$ .

---

<sup>2</sup>ver clase 9

En el segundo término, repetimos el truco que usamos en el término dipolar eléctrico

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_{\mathbf{k};Q}^p &= \frac{i}{2} \mathbf{k}_q \int d^3x' (x'^q \mathbf{j}_\omega^p[\mathbf{x}'] + x'^p \mathbf{j}_\omega^q[\mathbf{x}']) \\ &= \frac{i}{2} \mathbf{k}_q \int d^3x' \left( x'^q \frac{\partial x'^p}{\partial x'^s} + x'^p \frac{\partial x'^q}{\partial x'^s} \right) \mathbf{j}_\omega^s[\mathbf{x}'] \\ &= \frac{i}{2} \mathbf{k}_q \int d^3x' \frac{\partial}{\partial x'^s} (x'^p x'^q) \mathbf{j}_\omega^s[\mathbf{x}'] \\ &= -\frac{i\omega^2}{2c} \hat{\mathbf{x}}_q \int d^3x' x'^p x'^q \rho_\omega[\mathbf{x}']\end{aligned}\tag{29}$$

Como un término colineal con  $\hat{\mathbf{x}}$  en  $\mathbf{j}_{\mathbf{k}}$  no contribuye a los campos, podemos escribir

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k};Q}^p = -\frac{i\omega^2}{2c} Q_{\omega}^{pq} \hat{\mathbf{x}}_q \quad (30)$$

donde

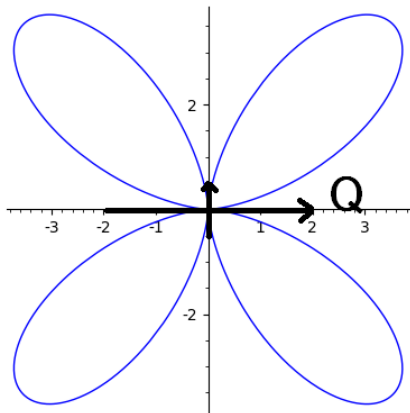
$$Q_{\omega}^{pq} = \int d^3x' \left[ x'^p x'^q - \frac{1}{3} \delta^{pq} \mathbf{x}'^2 \right] \rho_{\omega} [\mathbf{x}'] \quad (31)$$

es la transformada de Fourier del momento cuadrupolar eléctrico.

Por ejemplo, para una distribución de carga axisimétrica con momento cuadrupolar  $Q_{\omega}^{pq} = Q_{\omega} \text{diag}(-1, -1, 2)$  encontramos

$$w = \frac{9}{128\pi} \frac{\omega^6}{c^5} Q_{\omega}^2 \sin^2 2\theta \quad (32)$$

$$W_Q = \frac{3}{20} \frac{\omega^6}{c^5} Q_{\omega}^2 \quad (33)$$





# ANTENNAS



<https://gdmissionsystems.com/satcom-technologies/antennas/medium-and-large-fixed-antennas>

Una antena convierte energía eléctrica, transportada por cables o una guía de ondas, en energía de radiación, y viceversa.<sup>3</sup> Hay varios parámetros que cuantifican el desempeño de una antena. La eficiencia radiativa  $\eta_R$  de la antena es el cociente entre la potencia  $W$  radiada y la potencia  $W_A$  entregada a la antena. La resistencia radiativa se define por la relación

$$W = \frac{1}{2} R_r |I_0|^2 \quad (34)$$

donde  $I_0$  es la corriente que se alimenta a la antena. La directividad  $D$  es el cociente de la máxima potencia radiada por unidad de ángulo sólido, sobre la potencia media

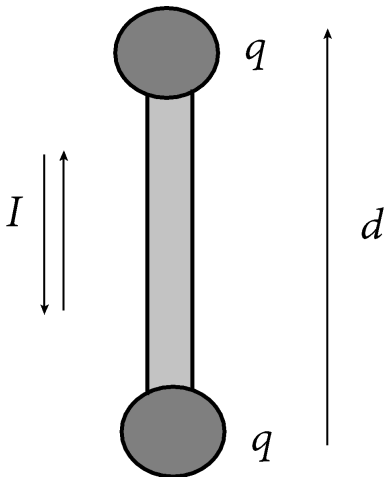
$$D = 4\pi \frac{W_{max}}{W} \quad (35)$$

Para un patrón dipolar,  $D = 3/2$ , mientras que para uno cuadrupolar,  $D = 15/8$ . La ganancia de la antena es  $G = \eta D$ .

---

<sup>3</sup>David H. Staelin, *Electromagnetics and Applications* (MIT, Cambridge (2011)).

Un *dipolo de Hertz* se puede pensar como dos condensadores que se cargan y descargan alternativamente, de modo que se produce una corriente homogénea  $I = I_0 e^{-i\omega t}$  en el conductor que los conecta.



Para esta geometría

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_k &= I_0 \int_{-d/2}^{d/2} dz' e^{ikz' \cos \theta} \mathbf{K} \\ &= \frac{2cI_0}{\omega} \frac{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta\right)}{\cos \theta} \mathbf{K}\end{aligned}\quad (36)$$

$$w[\theta, \varphi] = \frac{|I_0|^2}{2\pi c} \frac{\sin^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta\right)}{\cos^2 \theta} \sin^2 \theta \quad (37)$$

$$W = \frac{2|I_0|^2}{c} \left[ \pi \frac{d}{\lambda} \text{Si}\left[2\pi \frac{d}{\lambda}\right] - \sin^2\left[\pi \frac{d}{\lambda}\right] + \frac{\lambda}{4\pi d} \sin\left[2\pi \frac{d}{\lambda}\right] - \frac{1}{2} \right] \quad (38)$$

donde  $\lambda = 2\pi c/\omega$ .

La densidad de carga es

$$\rho = \frac{(-i)}{\omega} I_0 \left[ \delta \left( z - \frac{d}{2} \right) - \delta \left( z + \frac{d}{2} \right) \right] \quad (39)$$

El momento dipolar

$$\mathbf{d} = \frac{(-i)}{\omega} d I_0 \mathbf{K} \quad (40)$$

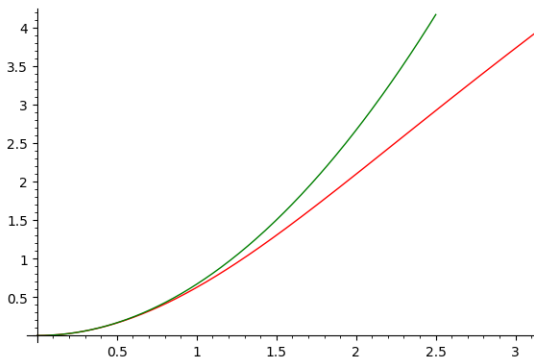
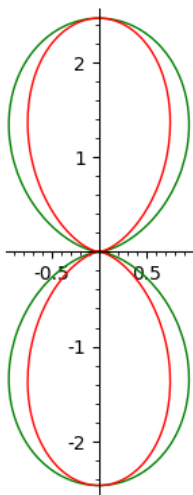
Bajo la aproximación dipolar

$$W_D = \frac{1}{8\pi} \frac{\omega^2}{c^3} d^2 |I_0|^2 \sin^2 \theta = \frac{|I_0|^2}{2\pi c} \left( \pi \frac{d}{\lambda} \right)^2 \sin^2 \theta \quad (41)$$

La potencia radiada total es

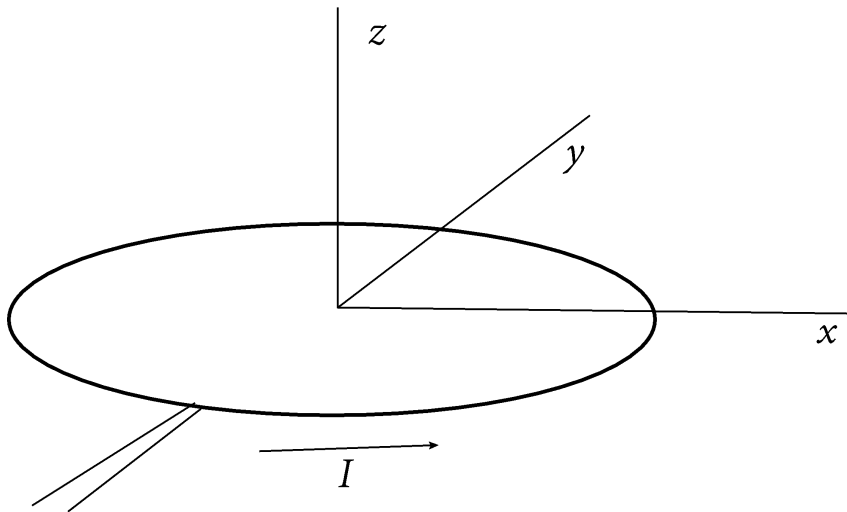
$$W_D = \frac{\omega^2}{3c^3} d^2 |I_0|^2 = \frac{2|I_0|^2}{c} \frac{2}{3} \left( \pi \frac{d}{\lambda} \right)^2 \quad (42)$$

El momento magnético y el cuadrupolar eléctrico son nulos.



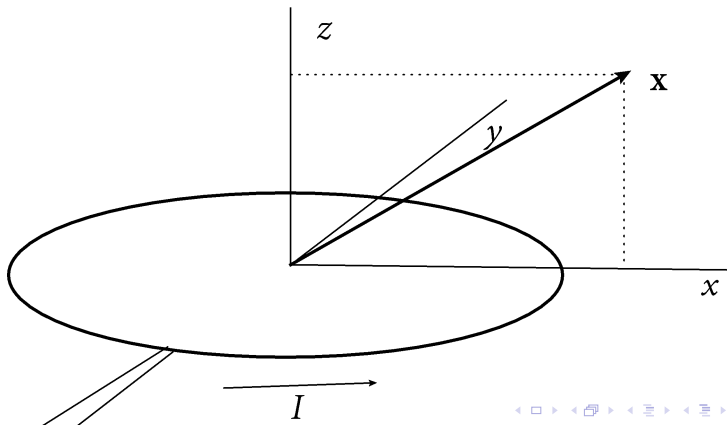
Izquierda: patrón de emisión de un dipolo de Hertz con  $d = \lambda/2$  (rojo) comparado con la aproximación dipolar (verde). Derecha:  $W$  como función de  $\pi d/\lambda$  para  $0 \leq d \leq \lambda$  (rojo) y su aproximación dipolar (verde).

Como segundo ejemplo consideramos una espira circular de radio  $a$  en el plano  $(x, y)$ , por donde circula una corriente  $I = I_0 e^{-i\omega t}$ . En este caso la densidad de carga es idénticamente nula, por lo que no hay momentos eléctricos.



Para calcular  $\mathbf{j}_k$ , orientamos los ejes coordenados de manera que  $\hat{\mathbf{x}} = \cos\theta\mathbf{K} + \sin\theta\mathbf{I}$  no tenga componente  $y$ . En este sistema  $\mathbf{j} = I_0 (-\sin\varphi\mathbf{I} + \cos\varphi\mathbf{J})$ , y

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_k &= I_0 \int R d\varphi e^{i2\pi a \cos\varphi \sin\theta/\lambda} (-\sin\varphi\mathbf{I} + \cos\varphi\mathbf{J}) \\ &= (2\pi i) a I_0 J_1 \left[ \frac{2\pi a}{\lambda} \sin\theta \right] \mathbf{J} \end{aligned} \quad (43)$$





En general

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k}} = (2\pi i) a l_0 J_1 \left[ \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta \right] \left( \frac{\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{x}}}{\sin \theta} \right) \quad (44)$$

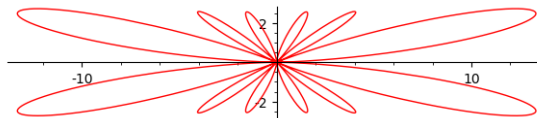
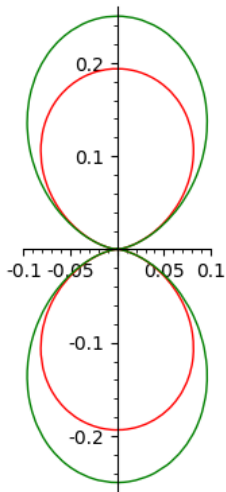
por lo tanto

$$w = \frac{2\pi^3}{c\lambda^2} a^2 |l_0|^2 \left( J_1 \left[ \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta \right] \right)^2 \quad (45)$$

mientras que la aproximación dipolar es

$$w_D = \frac{2\pi^3}{c\lambda^4} \left( \pi a^2 |l_0| \right)^2 \sin^2 \theta \quad (46)$$

donde hemos usado que para la espira  $m = IA/c$ ,  $A = \pi a^2$ .



Izquierda: Patrón de emisión de una espira con  $2\pi a = \lambda$  (rojo) comparado con la aproximación dipolar (verde). Derecha: patrón de emisión de una espira con  $2\pi a = 10\lambda$ .

Como último ejemplo, volvemos a la antena dipolar, pero con una distribución de corrientes más verosímil.

En general, la corriente forma una onda estacionaria con dos extremos fijos en  $z = \pm d/2$ . Por sencillez, retenemos solamente la “fundamental”  $I \approx I_0 \cos(\pi z/d) e^{-i\omega t}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_k &= I_0 \int_{-d/2}^{d/2} dz' e^{i2\pi z' \cos \theta / \lambda} \cos(\pi z' / d) \mathbf{K} \\
 &= \frac{2idI_0}{\pi} \frac{\cos\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta\right)}{1 - \left(\frac{2d}{\lambda} \cos \theta\right)^2} \mathbf{K} \\
 \omega &= \frac{\pi}{2c\lambda^2} \frac{4d^2 |I_0|^2}{\pi^2} \frac{\cos^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta\right)}{\left(1 - \left(\frac{2d}{\lambda} \cos \theta\right)^2\right)^2} \sin^2 \theta \quad (47)
 \end{aligned}$$

La densidad de carga

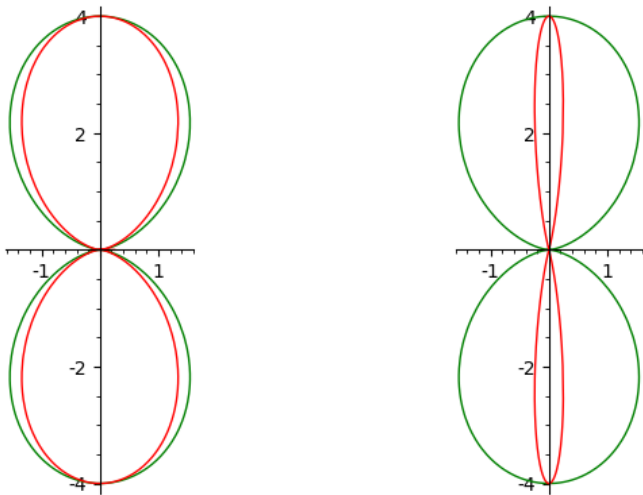
$$\rho = \frac{(i\pi)}{d\omega} I_0 \sin \frac{\pi z}{d} \quad (48)$$

El momento dipolar eléctrico

$$\mathbf{d} = \frac{2idl_0}{\pi\omega} \mathbf{K} \quad (49)$$

Por lo tanto, la aproximación dipolar es

$$\omega_D = \frac{\pi}{2c\lambda^2} \frac{4d^2 |I_0|^2}{\pi^2} \sin^2 \theta \quad (50)$$



Patrón de emisión del dipolo de Hertz mejorado (rojo) comparado con la aproximación dipolar (verde). Izquierda:  $d = \lambda/2$ ; Derecha:  $d = 5\lambda$ .

La clase que viene vamos a discutir el *verdadero* Principio de Heisenberg.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>F. Bloch, *Heisenberg and the early days of quantum mechanics*, Phys. Today 29, 23 (1976)