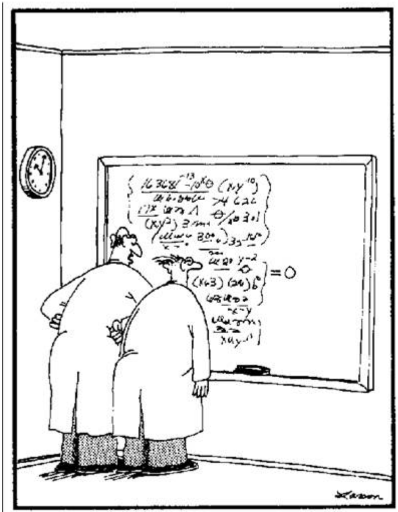
CLASE II



"No doubt about it, Ellington—we've mathematically expressed the purpose of the universe. Gad, how I love the thrill of scientific discovery!"

ACERCA DE LA DELTA DE DIRAC

Les presento la campana de Gauss

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \tag{1}$$

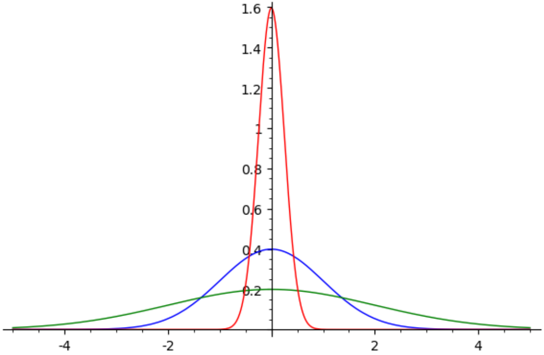


Figura: Verde: $\sigma = 2$, azul: $\sigma = 1$, rojo: $\sigma = 1/4$

A medida que $\sigma \to 0$ el pico se hace más agudo y más alto. Sin embargo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; f_\sigma (x) = 1 \tag{2}$$

independientemente de σ. Más generalmente

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; x^n \; f_\sigma (x) &= 0 \;\; \text{si } n \text{ es impar} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; x^n \; f_\sigma (x) &= \sigma^n (n-1)(n-3)\ldots 1 \;\; \text{si } n \text{ es par}
\end{aligned} \tag{3}$$

Supongamos que $g(x)$ es alguna función suave

$$g(x) = g(0) + g'(0)\,x + \frac{1}{2}g''(0)\,x^2 + \frac{1}{6}g'''(0)\,x^3 + \frac{1}{24}g^{IV}(0)\,x^4 + \ldots \tag{4}$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; g(x)\;\; f_\sigma(x) = g(0)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; f_\sigma(x) \\ + \quad & g'(0)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; x\; f_\sigma(x) + \frac{1}{2}g''(0)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; x^2\; f_\sigma(x) \\ + \quad & \frac{1}{6}g'''(0)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; x^3\; f_\sigma(x) + \frac{1}{24}g^{IV}(0)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; x^4\; f_\sigma(x) + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

O sea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ g(x)\ \ f_\sigma(x) = g(0) + \frac{1}{2}\sigma^2 g''(0) + \frac{1}{8}\sigma^4 g^{IV}(0) + \ldots \quad (6)$$

y cuando $\sigma \to 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ g(x)\ \ f_\sigma(x) \to g(0) \quad (7)$$

Decimos que la campana de Gauss es una *regularización de la delta*

ACERCA DE LA DERIVADA DE LA DELTA

En esta regularización de la delta, tenemos que

$$f'_\sigma(x) = -\frac{x}{\sigma^2} f_\sigma(x) \tag{8}$$

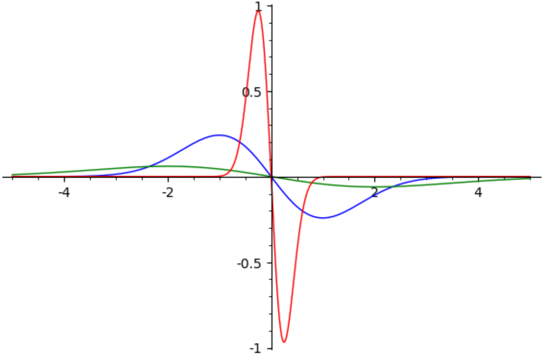


Figura: Verde: $\sigma = 2$, azul: $\sigma = 1$, rojo: $\sigma = 1/4$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ g(x)\ f'_\sigma(x) &= \frac{-1}{\sigma^2}\left\{ g(0)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x f_\sigma(x) \right.\\
&+ \ g'(0)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x^2\ f_\sigma(x) + \frac{1}{2}g''(0)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x^3\ f_\sigma(x)\\
&+ \ \left.\frac{1}{6}g'''(0)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x^4\ f_\sigma(x) + \dots\right\}\\
&= \ \frac{-1}{\sigma^2}\left\{ g'(0)\,\sigma^2 + \frac{1}{2}g'''(0)\,\sigma^4 + \dots\right\} \to -g'(0) \qquad (9)
\end{aligned}$$

En general

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ g(x)\ \delta'(x) = -g'(0) \qquad (10)$$

LA INTEGRAL DE LA DELTA

Definimos la integral

$$F_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{x} dy\ f_\sigma(y) \tag{11}$$

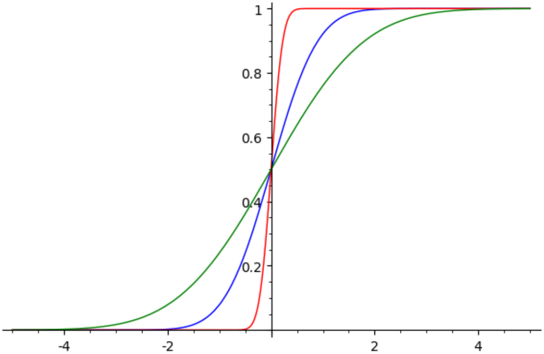


Figura: Verde: $\sigma = 2$, azul: $\sigma = 1$, rojo: $\sigma = 1/4$

En el límite converge al escalón, o función de Heaviside

$$\int_{-\infty}^{x} dy\ \delta(y) = \theta(x)$$
$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(y) \tag{12}$$

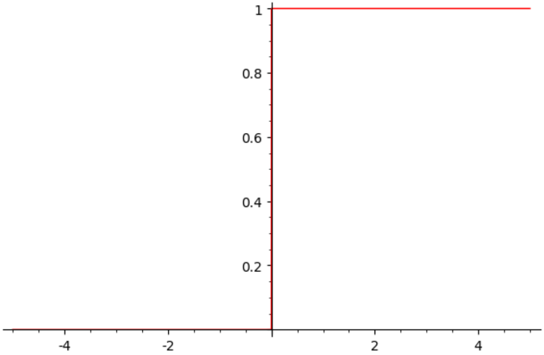


Figura: $\theta(x)$

LO QUE HAY QUE SABER

$$
\begin{aligned}
\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{I} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{J} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{K} \\
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right. &- \left.\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{I} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{J} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{K} \\
\nabla\times\nabla\phi &= 0;\;\; \nabla\times\mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = \nabla\phi \\
\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A} &= 0;\;\; \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}
\end{aligned} \tag{13}
$$

Teorema de Stokes

$$\int_S \mathbf{ds}\cdot\nabla\times\mathbf{A} = \int_{\delta S}\mathbf{dx}\cdot\mathbf{A} \tag{14}$$

Teorema de Gauss

$$\int_V d^3x\,\nabla\cdot\mathbf{A} = \int_{\delta V}\mathbf{ds}\cdot\mathbf{A} \tag{15}$$

Ecuación de Laplace, ecuación de Poisson, y función de Green

Queremos resolver la ecuación de Poisson

$$\Delta\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \rho \tag{16}$$

en un dominio $V \subset \mathbf{R}^3$ y con valores dados de ϕ (o de $\mathbf{n} \cdot \nabla\phi$) en δV

Pero como es muy difícil en cambio vamos a resolver la ecuación de Laplace

$$\Delta\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = 0 \tag{17}$$

en un dominio $V \subset \mathbf{R}^3$ y con valores dados de ϕ (o de $\mathbf{n} \cdot \nabla\phi$) en δV

Pero como sigue siendo muy difícil vamos a resolver en cambio

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \tag{18}$$

para $a \leq x \leq b \subset \mathbf{R}$ dados $f(a) = f_a$ y $f(b) = f_b$

Algunas propiedades interesantes

- Si $d^2 f/dx^2 = 0$ y $f_a = f_b = 0$, entonces $f = 0$
  Demostración: Consideramos la integral

$$J = \int_a^b dx \, \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \tag{19}$$

  Integrando por partes

$$J = f_b \frac{df}{dx}(b) - f_a \frac{df}{dx}(a) - \int_a^b dx \; f \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \tag{20}$$

  Entonces f debe ser una constante, pero como $f(a) = 0$, la constante debe ser 0

- Si $d^2 f/dx^2 = d^2 g/dx^2$, $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, entonces $f = g$

D: aplique la propiedad anterior a la función $f - g$

Por supuesto todo esto es irrelevante porque conocemos la solución

$$f_0(x) = f_a \frac{b-x}{b-a} + f_b \frac{x-a}{b-a} = f_a + \frac{f_b - f_a}{b-a}(x-a) \tag{21}$$

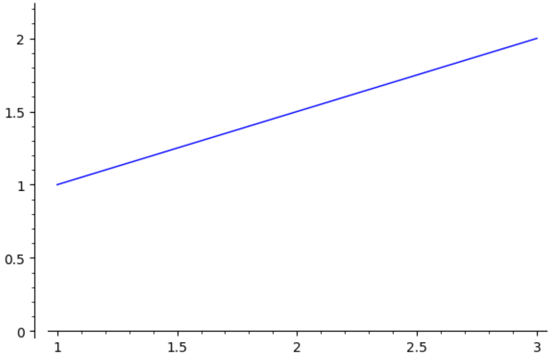


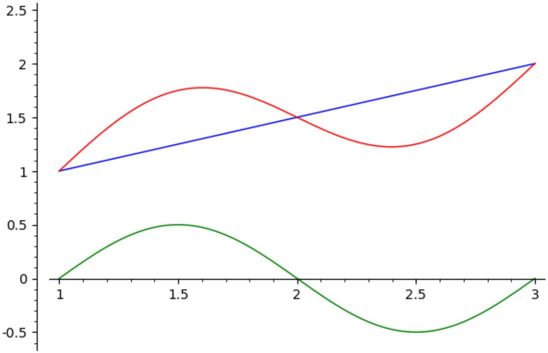
Figura: $f_0(x)$

Una propiedad menos evidente de f_0 es que f_0 es la función que realiza el mínimo de

$$J[f] = \int_a^b dx \, \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \tag{22}$$

entre todas las funciones que toman los valores $f(a) = f_a$ y $f(b) = f_b$

D: las funciones f que estamos considerando se pueden escribir como $f = f_0 + g$, con $g(a) = g(b) = 0$



Entonces

$$
\begin{aligned}
J[f] &= \int_a^b dx \left(\frac{df_0}{dx} + \frac{dg}{dx}\right)^2 \\
&= J[f_0] + 2\int_a^b dx \, \frac{df_0}{dx}\frac{dg}{dx} + J[g] \\
&= J[f_0] + 2\frac{f_b - f_a}{b - a}\int_a^b dx \, \frac{dg}{dx} + J[g] \\
&= J[f_0] + 2\frac{f_b - f_a}{b - a}\left(g(b) - g(a)\right) + J[g] \\
&= J[f_0] + J[g] \geq J[f_0]
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Una demostracíon más sofisticada usa que si f_0 es el mínimo de $J[f]$, entonces J debe ser estacionaria en f_0. Si perturbamos f_0 con una pequeña variación δf tal que $\delta f(a) = \delta f(b) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} J[f_0 + \delta f] &= J[f_0] + 2\int_a^b dx\ \frac{df_0}{dx}\frac{d\delta f}{dx} \\ &= J[f_0] + 2\left\{\frac{df_0}{dx}(b)\,\delta f(b) - \frac{df_0}{dx}(a)\,\delta f(a) - \int_a^b dx\ \frac{d^2 f_0}{dx^2}\delta f\right\} \end{aligned} \tag{24}$$

y para que esto sea estacionario debe ser

$$\frac{d^2 f_0}{dx^2} = 0 \tag{25}$$

Ya somos expertos en la ecuación $d^2 f/dx^2 = 0$. Porqué no probamos con

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = g\left(x\right) \tag{26}$$

para $a \leq x \leq b \subset \mathbf{R}$ dados $f\left(a\right) = f_a$ y $f\left(b\right) = f_b$?

Una estrategia posible es buscar una familia de funciones $g_\alpha(x)$ tales que hagan fácil resolver la ecuación de Poisson

$$\frac{d^2 G_\alpha}{dx^2} = g_\alpha \tag{27}$$

y que puedan servir para escribir una función g cualquiera

$$g(x) = \sum_\alpha C_\alpha g_\alpha(x) \tag{28}$$

Entonces, por linealidad, la solución de la ecuación $d^2 f/dx^2 = g$ es

$$f(x) = \sum_\alpha C_\alpha G_\alpha(x) \tag{29}$$

Las deltas son una familia de funciones que satisfacen la segunda propiedad, ya que cualquier función g en el intervalo (a, b) puede escribirse como

$$g\left(x\right)=\int_{a}^{b}dx'\;g\left(x'\right)\delta\left(x-x'\right) \tag{30}$$

Por lo tanto, vamos a empezar estudiando la ecuación

$$\frac{d^{2}G\left[x,x'\right]}{dx^{2}}=\delta\left(x-x'\right) \tag{31}$$

Empezamos observando que la función $G[x, x'] = \frac{1}{2}|x - x'|$ es la solución de

$$\frac{d^2 G[x, x']}{dx^2} = \delta(x - x') \tag{32}$$

Porque, efectivamente, $dG/dx = \theta(x - x') - 1/2$.

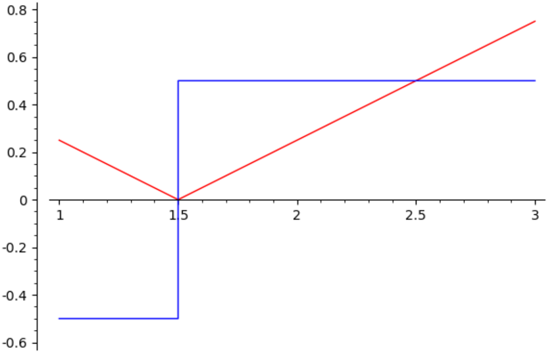


Figura: Rojo: $G[x, 1{,}5]$, azul: $dG[x, 1{,}5]/dx$

Ahora tomamos una función f cualquiera, y vamos a calcular

$$K = \int_a^b dx \, \frac{d}{dx} \left[f(x) \frac{dG[x, x']}{dx} - G\left[x, x'\right] \frac{df}{dx}(x) \right] \tag{33}$$

de dos maneras distintas.
Integrando directamente:

$$K = f(b) \frac{dG[b, x']}{dx} - G\left[b, x'\right] f'(b) - f(a) \frac{dG[a, x']}{dx} + G\left[a, x'\right] f'(a) \tag{34}$$

o distribuyendo las derivadas y usando que la segunda derivada de G es la delta

$$K = f\left(x'\right) - \int_a^b dx \, G\left[x, x'\right] \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \tag{35}$$

Igualando ambas expresiones, vemos que la solución de

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = g\left(x\right) \tag{36}$$

es

$$\begin{aligned} f\left(x'\right) &= \int_a^b dx\; G\left[x, x'\right] g\left(x\right) + f\left(b\right) \frac{dG\left[b, x'\right]}{dx} \\ &- G\left[b, x'\right] f'\left(b\right) - f\left(a\right) \frac{dG\left[a, x'\right]}{dx} + G\left[a, x'\right] f'\left(a\right) \end{aligned} \tag{37}$$

Pero no nos sirve porque no sabemos los valores de $f'\left(b\right)$ y $f'\left(a\right)$

Si trabajamos un poco más, vemos que es posible encontrar una función $G_0\left[x, x'\right]$ que es solución de

$$\frac{d^2 G_0\left[x, x'\right]}{dx^2} = \delta\left(x - x'\right) \tag{38}$$

y además $G_0\left[b, x'\right] = G_0\left[a, x'\right] = 0$.
Repitiendo lo anterior con G_0 en vez de G, ahora encontramos

$$\begin{aligned} f\left(x'\right) &= \int_a^b dx\ G_0\left[x, x'\right] g\left(x\right) \\ &+ f\left(b\right) \frac{dG_0\left[b, x'\right]}{dx} - f\left(a\right) \frac{dG_0\left[a, x'\right]}{dx} \end{aligned} \tag{39}$$

que es la solución de nuestro problema.

La función G_0 es

$$G_0\left[x,x'\right] = \frac{1}{2}\left|x-x'\right| - \frac{1}{2}\left[\left(b-x'\right)\frac{x-a}{b-a} + \left(x'-a\right)\frac{b-x}{b-a}\right] \tag{40}$$

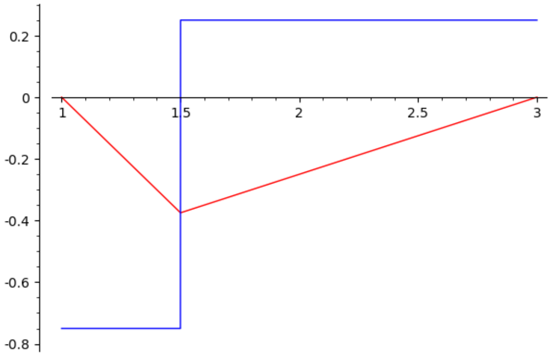


Figura: Rojo: $G_0\left[x, 1{,}5\right]$, azul: $dG_0\left[x, 1{,}5\right]/dx$

Para chequear todo esto, vamos a ver si en el caso $g = 0$ recuperamos la solución que ya encontramos antes. Efectivamente

$$
\begin{aligned}
f\left(x'\right) &= f_b \frac{dG_0\left[b, x'\right]}{dx} - f_a \frac{dG_0\left[a, x'\right]}{dx} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ f_b \left[1 - \frac{a + b - 2x'}{b - a}\right] + f_a \left[1 + \frac{a + b - 2x'}{b - a}\right]\right\} \\
&= f_a + \frac{f_b - f_a}{b - a}\left(x' - a\right) \qquad (41)
\end{aligned}
$$

En el problema en 3 dimensiones, usamos la misma manera de pensar que usamos en una dimensión. La ecuación de Laplace $\Delta f = 0$ en un dominio V, dada f en el borde δV tiene solución bajo condiciones amplias para V (problema de Dirichlet). La solución con condiciones de contorno triviales es idénticamente nula, lo que se puede ver estudiando la integral

$$\begin{aligned} J[f] &= \int_V d^3x\ (\nabla f)^2 \\ &= \int_{\delta V} \mathbf{ds} \cdot (f \nabla f) - \int_V d^3x\ f \Delta f \end{aligned} \tag{42}$$

Nótese que hemos reemplazado una integración por partes por el teorema de Gauss. De hecho, la solución de la ecuación de Laplace minimiza J sobre todas las funciones con valores dados en el borde.

El papel de la función G lo cumple

$$G\left[\mathbf{x},\mathbf{x}'\right]=\frac{-1}{4\pi\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|} \tag{43}$$

Efectivamente, si $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$

$$\Delta \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r} = 0 \tag{44}$$

en cualquier punto tal que $r \neq 0$, pero, si V es una esfera de radio ϵ con centro en el origen,

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \, \Delta \frac{1}{r} &= \int_{\delta V} \mathbf{ds} \cdot \nabla f \\ &= \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \epsilon^2 \left(\frac{-1}{\epsilon^2} \right) = -4\pi \end{aligned} \tag{45}$$

Encontrar G_0 requiere más trabajo. Una vez que uno la ha encontrado, entonces para cualquier f vale

$$f\left(\mathbf{x}'\right) = \int_V d^3x \; G_0\left[\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right] \Delta f(x) + \int_{\delta V} \mathbf{ds} \cdot \nabla G_0\left[\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right] f(x) \tag{46}$$

Una novedad del problema en tres dimensiones es la posibilidad de plantear el *problema de Neumann*, que consiste en fijar $\mathbf{n} \cdot \nabla f$ (en vez de f) en el borde.

Las propiedades del problema de Neumann son similares a las del problema de Dirichlet, excepto que la solución es única a menos de una constante. La función G_0, por supuesto, es distinta.

En física, el problema de Dirichlet aparece cuando uno trata de encontrar el potencial ϕ en un dominio, dados sus valores en el borde. El problema de Neumann aparece cuando uno trata de encontrar el potencial, dada la componente normal del campo $\mathbf{E}$ en el borde.

Una propiedad importante de las soluciones de la ecuación de Laplace (llamadas *funciones armónicas*) es que el valor de una función armónica en un punto $\mathbf{x}'$ es el promedio de los valores de la función en una esfera de radio ϵ con centro en $\mathbf{x}'$. Sin pérdida de generalidad podemos elegir $\mathbf{x}'$ como el origen de nuestro sistema de coordenadas. Entonces podemos usar la función

$$G_0\left[\mathbf{x}, \mathbf{0}\right] = \frac{-1}{4\pi}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\epsilon}\right] \tag{47}$$

y encontramos

$$f\left(\mathbf{0}\right) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, f\left(\epsilon\hat{\mathbf{r}}\right) \tag{48}$$

Una consecuencia es que $f(\mathbf{0})$ no puede ser ni mayor ni menor que todos los valores de f en el borde. En particular, $\mathbf{0}$ no puede ser un extremo.
Esto se conoce como el *Teorema de Earnshaw*: una carga puntual no puede estar en equilibrio en un campo electroestático en vacío.

Hemos visto que si conocemos la *función de Green* G_0 podemos resolver la ecuación de Poisson para cualquier fuente, con condiciones de contorno de Dirichlet o de Neumann.

A partir de la próxima clase veremos varias formas de encontrar G_0 para dominios de distinto tipo.