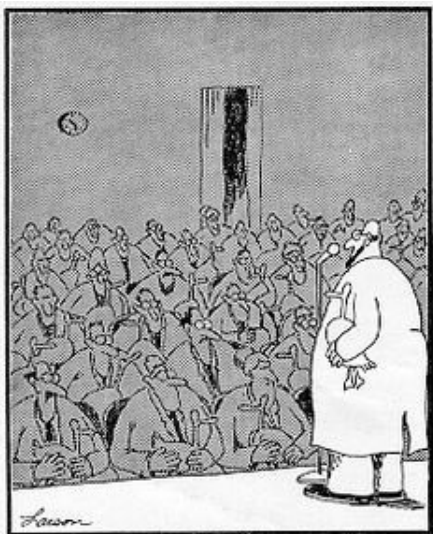


DISPERSION DE ONDAS EN MEDIOS INHOMOGENEOS



Suddenly, Professor Liebowitz realizes he has come to the seminar without his duck.

Queremos estudiar la propagación de una onda de frecuencia ω en un medio en el que la constante dieléctrica $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x})$ está sujeta a fluctuaciones aleatorias que dependen de la posición, es decir, $\epsilon = \epsilon_0 + \delta\epsilon(\mathbf{x})$, con $\delta\epsilon \ll \epsilon$. Para simplificar, asumimos $\mu = 1$.

El punto de partida son las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} + ik\mathbf{D} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

$$k = \omega/c = 2\pi/\lambda$$

Eliminando el campo magnético

$$(-\nabla \times \nabla \times) \mathbf{E} + k^2 \mathbf{D} = 0\tag{2}$$

Asumimos que

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_s\end{aligned}\tag{3}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}_0 + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}_s - \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0^2} \mathbf{D}_0\end{aligned}\tag{4}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D}_0 &= \nabla \cdot \mathbf{D}_s &= 0 \\ \Delta \mathbf{D}_0 + k_0^2 \mathbf{D}_0 &= 0 \\ \Delta \mathbf{D}_s + k_0^2 \mathbf{D}_s &= \frac{1}{\epsilon_0} (-\nabla \times \nabla \times) [\delta \epsilon \mathbf{D}_0]\end{aligned}\quad (5)$$

$$k_0 = \sqrt{\epsilon_0} k$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_s(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3x' \frac{e^{ik_0|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} (-\nabla \times \nabla \times) [\delta \epsilon \mathbf{D}_0] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (-\nabla \times \nabla \times) \int d^3x' \frac{e^{ik_0|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} [\delta \epsilon \mathbf{D}_0](\mathbf{x}')\end{aligned}\quad (6)$$

Lejos del punto de dispersión

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_s(\mathbf{x}) &= (-\nabla \times \nabla \times) \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} \mathbf{G} \\ &= \frac{k_0^2 e^{ik_0 R}}{4\pi R} \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{G} \\ \mathbf{G} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}'} [\delta\epsilon \mathbf{D}_0](\mathbf{x}') \\ \mathbf{k}_0 &= k_0 \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{7}$$

Si el campo incidente es una onda plana

$$\mathbf{D}_0(\mathbf{x}') = \epsilon_0 E_0 \mathbf{e}_0 e^{i\mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{x}'} \quad (8)$$

donde E_0 y $\mathbf{e}_0$ definen la amplitud y la polarización de la onda incidente, y $\mathbf{k}'_0$ la dirección de propagación, $\mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{e}_0 = 0$.

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= E_0 \delta\epsilon_{\mathbf{q}} \mathbf{e}_0 \\ \delta\epsilon_{\mathbf{q}} &= \int d^3x' e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}'} \delta\epsilon(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'_0 \quad (10)$$

Obsérvese que $q = 2k_0 \sin(\theta/2)$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{k}_0$ y $\mathbf{k}'_0$, y que $\delta\epsilon_{\mathbf{q}}$ tiene unidades de L^3 .

Los campos están dados por:

Para la onda incidente

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0 &= E_0 \mathbf{e}_0 e^{i\mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{x}'} \\ \mathbf{B}_0 &= E_0 \left(\hat{\mathbf{k}}'_0 \times \mathbf{e}_0 \right) e^{i\mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{x}'}\end{aligned}\quad (11)$$

Para la onda dispersada

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_s &= E_0 \frac{k_0^2 e^{ik_0 R}}{4\pi R} \left(\frac{\delta\epsilon_{\mathbf{q}}}{\epsilon_0} \right) \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_0) \\ \mathbf{B}_s &= -E_0 \frac{k_0^2 e^{ik_0 R}}{4\pi R} \left(\frac{\delta\epsilon_{\mathbf{q}}}{\epsilon_0} \right) (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_0)\end{aligned}\quad (12)$$

FLUJO DE ENERGIA

Para la onda incidente

$$\mathbf{S}_0 = S_0 \hat{\mathbf{k}}'_0 = \frac{c}{4\pi} |E_0|^2 \hat{\mathbf{k}}'_0 \quad (13)$$

Para la onda dispersada

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_s &= S_s \hat{\mathbf{x}} \\ S_s &= \frac{S_0}{(4\pi R_{\epsilon_0})^2} k_0^4 \left\langle |\delta\epsilon_{\mathbf{q}}|^2 \right\rangle |\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_0|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

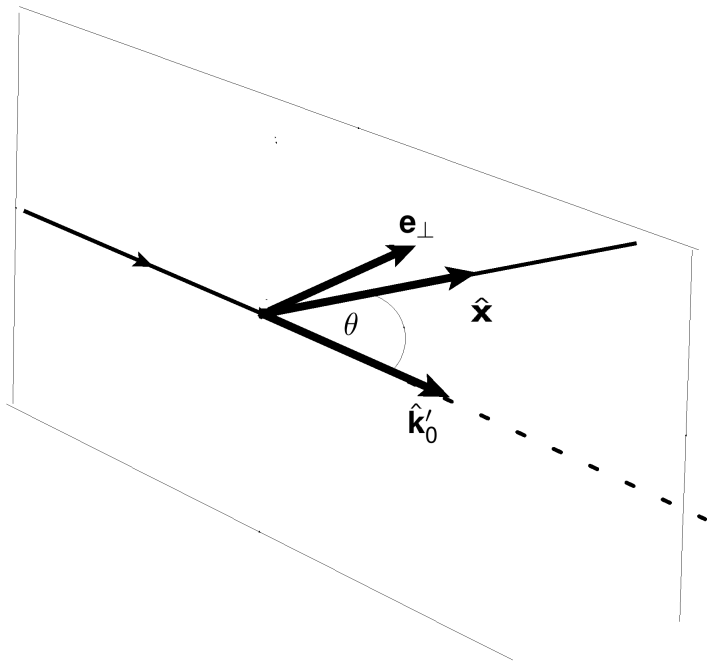
INTENSIDAD Y POLARIZACION

Los vectores $\hat{\mathbf{k}}'_0$ y $\hat{\mathbf{x}}$ definen el *plano de dispersión*. Si $\mathbf{e}_0$ es perpendicular a ese plano, debe ser

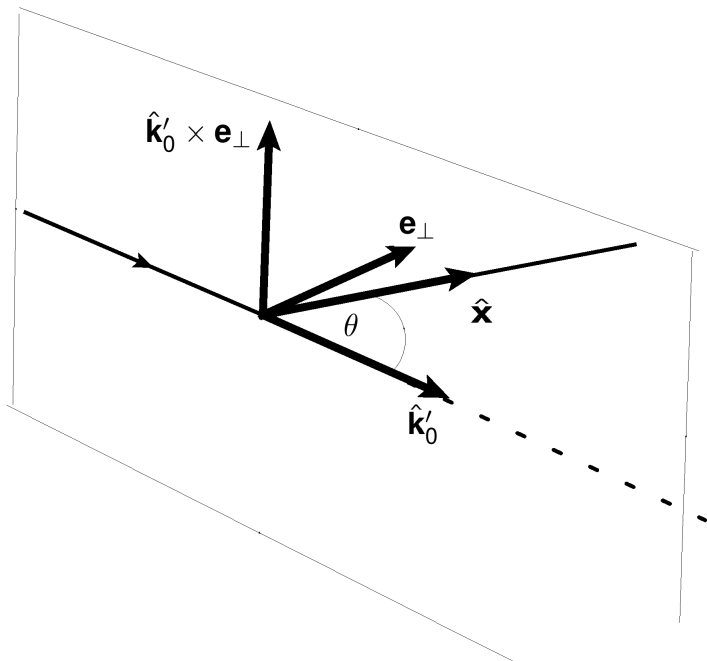
$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_\perp = \frac{\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{k}}'_0}{\sin \theta} \quad (15)$$

donde θ es el ángulo comprendido.

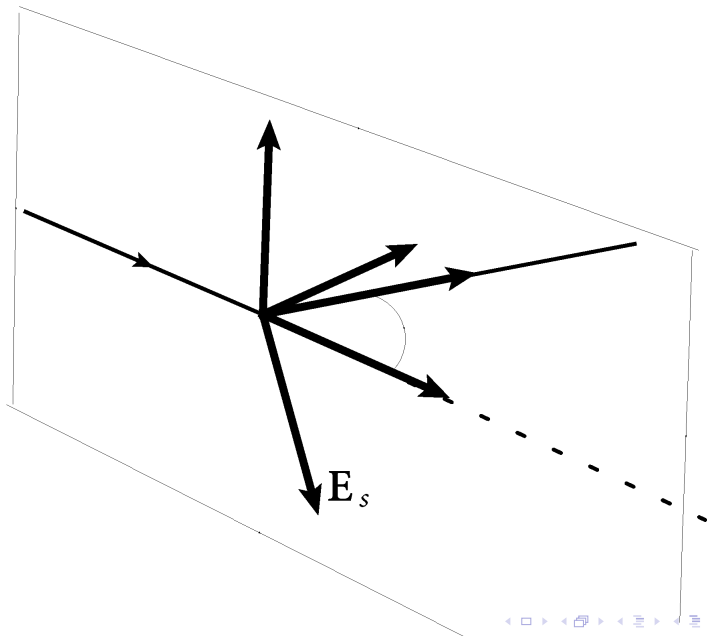
En este caso también $\mathbf{E}_s \propto \mathbf{e}_\perp$ y $|\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_0|^2 = 1$.



Si $\mathbf{e}_0$ pertenece al plano de dispersión, debe ser $\mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{k}}'_0 \times \mathbf{e}_\perp$.



En este caso $|\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_0|^2 = \cos^2 \theta$. Por lo tanto, si la luz incidente es natural, la luz dispersada está parcialmente polarizada.



DISPERSION DE RAYLEIGH

La amplitud de la onda dispersada depende de

$$\langle |\delta\epsilon_{\mathbf{q}}|^2 \rangle = \int d^3x' d^3x'' e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'')} \langle \delta\epsilon(\mathbf{x}'') \delta\epsilon(\mathbf{x}') \rangle \quad (16)$$

La *dispersión de Rayleigh* ocurre cuando

$$\langle \delta\epsilon(\mathbf{x}'') \delta\epsilon(\mathbf{x}') \rangle = \sigma^2 \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \quad (17)$$

En cuyo caso

$$\langle |\delta\epsilon_{\mathbf{q}}|^2 \rangle = V\sigma^2 \quad (18)$$

no depende de $\mathbf{q}$. σ^2 tiene unidades de L^3 .

El caso opuesto es cuando $\langle \delta\epsilon(\mathbf{x}'') \delta\epsilon(\mathbf{x}') \rangle = C^2$ no depende de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$. En ese caso $\langle |\delta\epsilon_{\mathbf{q}}|^2 \rangle \propto V\delta(\mathbf{q})$ y no se produce dispersión.

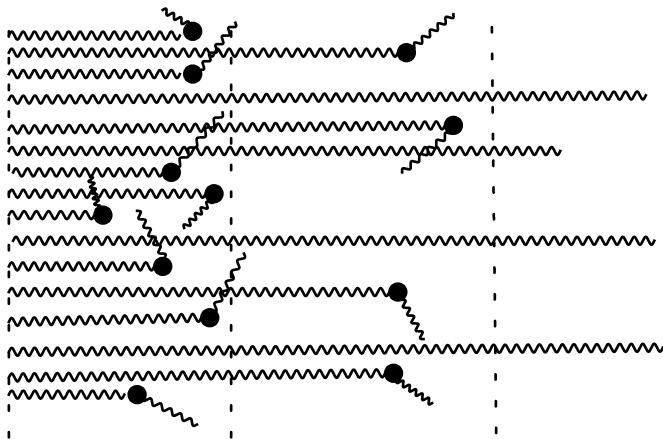
COEFICIENTE DE ATENUACION

En el caso de dispersión de Rayleigh, la potencia total dispersada en un volumen V para luz incidente natural

$$\delta S = \frac{3\sigma^2 k_0^4}{32\pi\epsilon_0^2} VS_0 \quad (19)$$

Un haz de sección transversal constante pierde intensidad a una tasa

$$\frac{dS}{dx} = -\alpha S; \quad \alpha = \frac{3\sigma^2 k_0^4}{32\pi\epsilon_0^2} \quad (20)$$



Cuanto menor la longitud de onda, mayor la atenuación.

EL VERDADERO PRINCIPIO DE HEISENBERG



Werner Heisenberg en 1926.

De Friedrich Hund - Friedrich Hund, CC BY 3.0,

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=28464380>

Estábamos caminando y de alguna manera empezamos a hablar del espacio. Yo acababa de leer «Espacio, tiempo y materia» de Weyl, y bajo su influencia declaré con orgullo que el espacio era simplemente el campo de los operadores lineales.

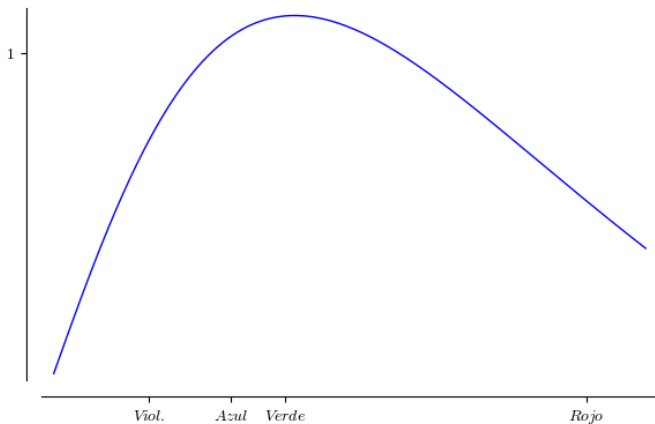
- Ridículo - dijo Heisenberg - el espacio es azul y los pájaros vuelan por él.

F. Bloch, *Heisenberg and the early days of quantum mechanics*, Phys. Today 29, 23 (1976)

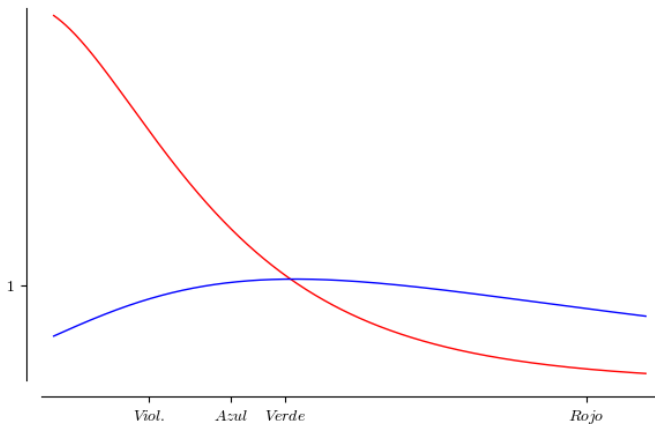
Asumiendo que Heisenberg se refería al cielo más que al espacio en abstracto, es realmente azul?



El Sol tiene un espectro de cuerpo negro con un máximo alrededor de 500 nm. Por lo tanto, el cielo debería ser **verde**.



Sin embargo, la luz que vemos cuando no miramos directamente al Sol es luz dispersada en la atmósfera, y por lo tanto hay que corregir al espectro solar por un factor $1/\lambda^4$.



Por lo tanto, el cielo es **violeta**.

En realidad, el ojo humano tiene tres tipos de células sensibles a la luz, cuya respuesta es máxima a los 570, 543 y 442 nm. Por eso percibimos el azul con mayor intensidad que el violeta.

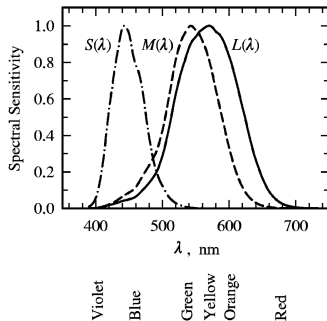
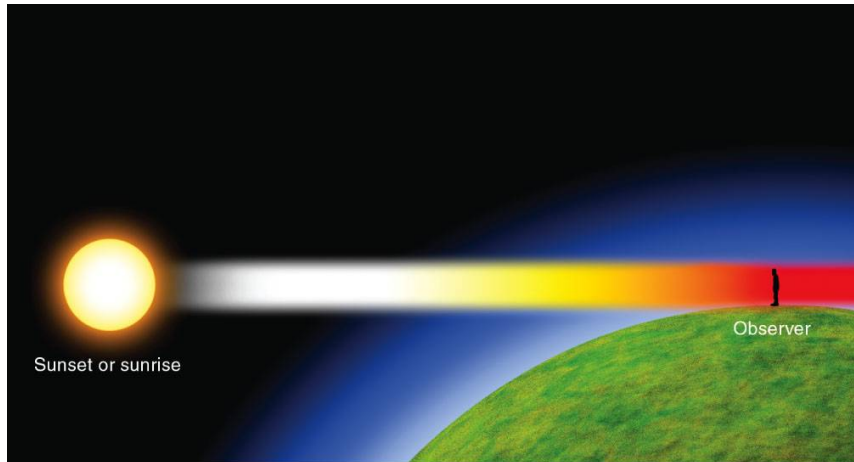


Fig. 3. Spectral sensitivities of human cones for a centrally viewed target two degrees in diameter. The results are for an average, normal observer. Each curve is normalized so that the maximum value of the sensitivity is one. Data from Ref. 27.

G. S. Smith, *Human color vision and the unsaturated blue color of the daytime sky*, Am. J. Phys. 73, 590 (2005).

Los atardeceres se ven rojos porque al mirar directamente al Sol, y ser mayor el recorrido de la luz en la atmósfera, las ondas más cortas están fuertemente suprimidas.

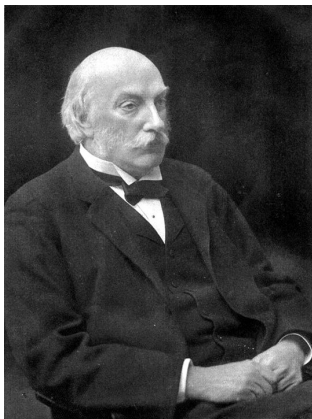


© 2007 Thomson Higher Education

La dispersión de Rayleigh puede explicar el color (y la polarización) de la luz del cielo, pero, ¿qué provoca las fluctuaciones en la constante dieléctrica?

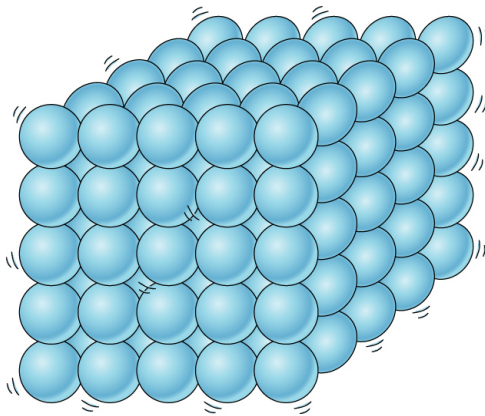


En el trabajo original (1871), John Strutt (Lord Rayleigh) asumió que cada molécula de aire dispersaba luz de manera independiente.



John William Strutt, Lord Rayleigh (1842—1919)

Sin embargo, con densidades del orden de 10^{19} cm^{-3} , un cubo cuyo lado midiera una longitud de onda de 700 nm ($7 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$), correspondiente al color rojo, contiene alrededor de 3400000 moléculas. En estas condiciones, parece más razonable tratar al aire como un medio continuo, en cuyo caso no habría dispersión.¹



¹I. I. Sobel'man, *On the teory of light scattering in gases*, Physics – Uspekhi 45, 75 (2002)

Entre 1908 y 1910, Smoluchowski y Einstein demostraron que las variaciones de la constante dieléctrica eran debidas a *fluctuaciones estadísticas* en la densidad y temperatura del aire.²



Marian Smoluchowski (1827–1917)

²G. S. Smith, *Summing the molecular contributions to skylight*, Am. J. Phys. 76, 816 (2008)

Las fluctuaciones estadísticas de la constante dieléctrica provocan dispersión de Rayleigh si la longitud de correlación de las fluctuaciones es menor que la longitud de onda de la luz. Lo que determina la distancia de correlación es el *camino libre medio*³

$$l = \frac{1}{n\sigma} \quad (21)$$

donde n es la densidad numérica y σ la sección eficaz para el choque entre dos moléculas. Por lo tanto, para que se den las condiciones de la dispersión de Rayleigh debe ser

$$\sigma \geq 1/n\lambda \approx 2\pi \left(1,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}\right)^2 \quad (22)$$

que es efectivamente menor que el valor esperado.⁴

³Ver clase 15

⁴J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Reading (1994)), ec. 7.6.49

Para los temas de esta clase recomiendo ver I. L. Fabelinski, *Molecular scattering of light* (Plenum, New York (1968)).

La clase que viene vamos a estudiar la radiación de partículas en colisiones y el efecto Cerenkov.