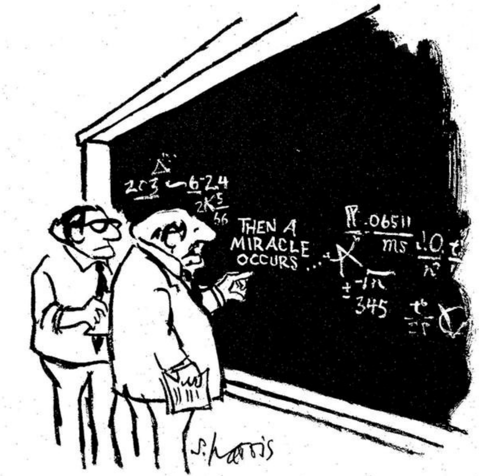
RADIACION DE CARGAS EN MOVIMIENTO



"I THINK YOU SHOULD BE MORE EXPLICIT HERE IN STEP TWO."

Empezamos igual que en la clase 19, con la ecuación para el tetra potencial en vacío en el gauge de Lorenz [1]

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial t^2} - \Delta A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{1}$$

$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$, $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$. La solución se puede escribir en términos de la función de Green[2]

$$A^\mu[\mathbf{x}, t] = \frac{4\pi}{c}\int dt' \int d^3x' \; G\left[\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'\right] j^\mu\left[\mathbf{x}', t'\right] \tag{2}$$

G es la solución a

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right)\delta\left(t - t'\right) \tag{3}$$

$G = G[\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t']$. Por causalidad, $G = 0$ si $t - t' < c\,|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.

---

[1] ver clase 16

[2] ver la clase 11

Pero esta vez usamos la función de Green en coordenadas [3]

$$G\left[\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'\right] = \frac{c}{4\pi}\frac{\delta\left(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - c\left(t-t'\right)\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\theta\left(t-t'\right) \tag{4}$$

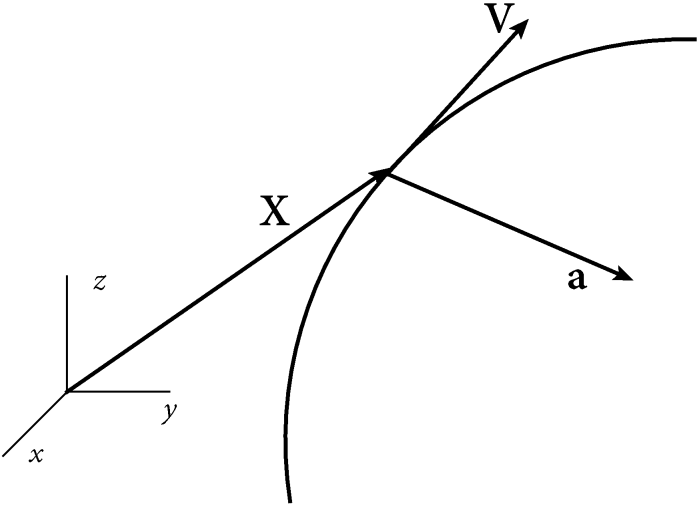
$$A^{\mu}\left[\mathbf{x}, t\right] = \int dt' \int d^3x' \ \frac{\delta\left(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - c\left(t-t'\right)\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} j^{\mu}\left[\mathbf{x}', t'\right]\theta\left(t-t'\right) \tag{5}$$

[3] ver clase 11

Además, asumimos que la corriente está asociada a una única partícula que sigue una trayectoria

$$X^{\mu} = X^{\mu}(\tau) = (cT(\tau), \mathbf{X}(\tau)) \tag{6}$$

donde τ es el tiempo propio de la partícula.

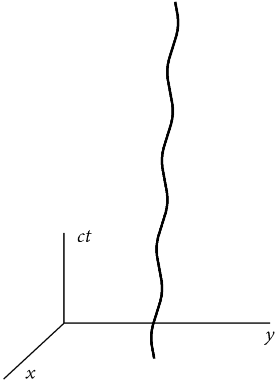


Entonces

$$j^{\mu}\left(x'^{\mu}\right) = ec \int \, cd\tau \; u^{\mu}(\tau)\, \delta^{(4)}\left(x' - X(\tau)\right) \tag{7}$$

donde u^{μ} es la tetravelocidad[4]

$$u^{\mu} = \frac{dX^{\mu}}{cd\tau} \tag{8}$$



[4] ver clase 17. En un referencial cualquiera $u^{\mu} = \gamma\left(1, \mathbf{v}/c\right)$, $u^2 = -1$.

Ahora podemos hacer la integral en (5)

$$\begin{aligned} A^{\mu}[\mathbf{x},t] &= \int dt' \int d^3x' \frac{\delta\left(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| - c\left(t-t'\right)\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} j^{\mu}\left[\mathbf{x}',t'\right]\theta\left(t-t'\right) \\ &= ec\int d\tau\; u^{\mu}(\tau)\; \frac{\delta\left(|\mathbf{x}-\mathbf{X}(\tau)| - c\left(t-T(\tau)\right)\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{X}(\tau)|}\theta\left(t-T(\tau)\right) \end{aligned} \tag{9}$$

o bien, cambiando variables de τ a T

$$A^{\mu} = e\int dT\; \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{V}(T)/c \end{pmatrix} \frac{\delta\left(|\mathbf{x}-\mathbf{X}(T)| - c\left(t-T\right)\right)}{(t-T)}\theta\left(t-T\right) \tag{10}$$

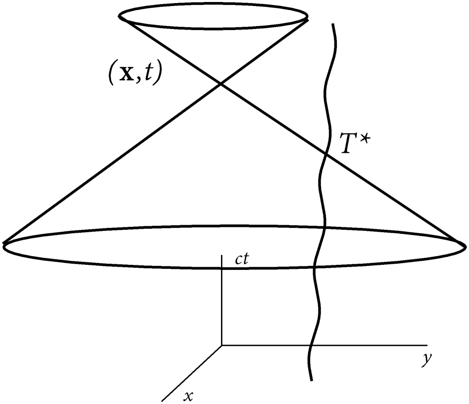
donde

$$\mathbf{V}(T) = \frac{d\mathbf{X}}{dT} \tag{11}$$

La ecuación

$$f\left(T\right) = \left|\mathbf{x} - \mathbf{X}\left(T\right)\right| - c\left(t - T\right) = 0 \tag{12}$$

tiene a lo sumo una única solución $T = T^{*}\left(t, \mathbf{x}\right) \leq t$ (decimos que T^{*} es el *tiempo retardado*).



Usando que

$$\delta\left(f\left(T\right)\right)=\frac{1}{\left|\frac{df}{dT}\right|}\delta\left(T-T^{*}\right) \tag{13}$$

Encontramos

$$\begin{aligned}
&\delta\left(\left|\mathbf{x}-\mathbf{X}\left(T\right)\right|-c\left(t-T\right)\right)\\
=\;&\left\{\left[\frac{d}{dT}\left(\left|\mathbf{x}-\mathbf{X}\left(T\right)\right|-c\left(t-T\right)\right)\right]_{T=T^{*}}\right\}^{-1}\delta\left(T-T^{*}\right)\\
=\;&\left\{\left[c+\frac{d}{dT}\left|\mathbf{x}-\mathbf{X}\left(T\right)\right|\right]_{T=T^{*}}\right\}^{-1}\delta\left(T-T^{*}\right)
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{d}{dT}\left|\mathbf{x}-\mathbf{X}\left(T\right)\right|=-\frac{\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}\left(T\right)\right)\cdot\mathbf{V}\left(T\right)}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{X}\left(T\right)\right|} \tag{15}$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
A^{\mu} &= \frac{e}{c\,(t - T^*)} \left[1 - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{X}^*)\cdot\mathbf{V}^*}{c\,|\mathbf{x} - \mathbf{X}^*|}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{V}^*/c \end{pmatrix} \\
&= e\left[c\,(t - T^*) - (\mathbf{x} - \mathbf{X}^*)\cdot\frac{\mathbf{V}^*}{c}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{V}^*/c \end{pmatrix} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

donde $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}\,(T^*)$, $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}\,(T^*)$. Estos son los *potenciales de Liénard $-$ Wiechert*.

Si $\mathbf{X} = \mathbf{V}T$, entonces es posible encontrar T^* explícitamente, recuperando los resultados de la clase 18.

Para encontrar los campos, necesitamos las derivadas de T^* respecto de t y $\mathbf{x}$. Observamos que

$$d\left[c^2\left(t-T^*\right)^2-\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}^*\right)^2\right]=0 \tag{17}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 2c^2\left(t-T^*\right)dt &- 2\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}^*\right)\cdot d\mathbf{x} \\ &- 2\left[c^2\left(t-T^*\right)-\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}^*\right)\cdot\mathbf{V}^*\right]dT^*=0 \end{aligned} \tag{18}$$

Introducimos el versor $\mathbf{n}$ en la dirección de $\mathbf{x} - \mathbf{X}^*$

$$\mathbf{x} - \mathbf{X}^* = c\,(t - T^*)\,\mathbf{n} \tag{19}$$

$$dt - \frac{1}{c}\mathbf{n} \cdot d\mathbf{x} - \left[1 - \frac{1}{c}\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}^*\right] dT^* = 0 \tag{20}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{T}^* &= \left[1 - \frac{1}{c}\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}^*\right]^{-1} \\ \nabla T^* &= -\frac{1}{c}\dot{T}^*\mathbf{n} \end{aligned} \tag{21}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \varphi &= e\left[c\,(t-T^*)-(\mathbf{x}-\mathbf{X}^*)\cdot\frac{\mathbf{V}^*}{c}\right]^{-1} \\ \dot{\varphi} &= -\frac{c}{e}\varphi^2+\frac{\partial\varphi}{\partial T^*}\,\dot{T}^* \\ \nabla\varphi &= \frac{1}{c}\left[\frac{c}{e}\varphi^2\frac{\mathbf{V}^*}{c}-\frac{\partial\varphi}{\partial T^*}\,\dot{T}^*\mathbf{n}\right] \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \varphi \frac{\mathbf{V}^*}{c} \\
\dot{\mathbf{A}} &= \dot{\varphi} \frac{\mathbf{V}^*}{c} + \varphi \frac{\mathbf{a}^*}{c} \dot{T}^* \\
\nabla \times \mathbf{A} &= \nabla\varphi \times \frac{\mathbf{V}^*}{c} + \varphi \, \nabla T^* \times \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{V}^*}{dT^*} \\
&= \nabla\varphi \times \frac{\mathbf{V}^*}{c} - \varphi \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{a}^*}{c} \dot{T}^* \qquad (23)
\end{aligned}$$

$\mathbf{a}^* = (d\mathbf{V}/dT)\,(T^*)$

Los campos son

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} \\
&= \frac{1}{c}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial T^*}\dot{T}^*\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{V}^*}{c}\right) - \varphi\frac{\mathbf{a}^*}{c}\dot{T}^*\right] \\
\mathbf{B} &= \nabla\times\mathbf{A} \\
&= \frac{-1}{c}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial T^*}\dot{T}^*\mathbf{n}\times\frac{\mathbf{V}^*}{c} + \varphi\,\mathbf{n}\times\frac{\mathbf{a}^*}{c}\dot{T}^*\right] \\
&= \mathbf{n}\times\mathbf{E}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial T^*} = \frac{c\varphi^2}{e}\left[1 - \frac{V^{*2}}{c^2} + (t - T^*)\,\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{a}^*}{c}\right] \tag{25}
$$

APROXIMACION DIPOLAR

La aproximación dipolar consiste en asumir $X^* \ll x$, de modo que

$$T^* = t - \frac{R}{c} \tag{26}$$

$R = |\mathbf{x}|$, y

$$V^* \ll c \tag{27}$$

En esta aproximación $\dot{T}^* = 1$ y los campos se reducen a

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e}{R^2}\,\mathbf{n} - \frac{e}{c^2 R}\left[\mathbf{a}^* - \mathbf{n}\,(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}^*)\right] \\ \mathbf{B} &= \mathbf{n}\times\mathbf{E} \end{aligned} \tag{28}$$

Reconocemos el campo Coulombiano más un campo de radiación proporcional a la aceleración retardada. Ignorando al campo Coulombiano, el vector de Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\frac{e^2}{c^4 R^2}\, a^2\, \mathbf{n}\, \sin^2\theta \tag{29}$$

donde θ es el ángulo entre **a** y **n**. Como la densidad de impulso es $\mathbf{p} = \mathbf{S}/c$, el impulso total contenido en el campo de radiación es cero. La potencia total radiada es

$$S = \frac{2e^2}{3c^3}a^2 \tag{30}$$

que es la *fórmula de Larmor*.

CASO RELATIVISTA

Si $V^* \approx c$, es necesario usar las fórmulas exactas

$$
\begin{aligned}
\varphi &= e\left[c\,(t-T^*)-(\mathbf{x}-\mathbf{X}^*)\cdot\frac{\mathbf{V}^*}{c}\right]^{-1} \\
&= \frac{e}{R\left[1-\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{V}^*}{c}\right]} \\
\frac{\partial\varphi}{\partial T^*} &= \frac{c\varphi^2}{e}\left[1-\frac{V^{*2}}{c^2}+(t-T^*)\,\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{a}^*}{c}\right] \\
&= \frac{ce}{R^2\left[1-\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{V}^*}{c}\right]^2}\left[1-\frac{V^{*2}}{c^2}+\frac{R}{c^2}\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}^*\right] \\
\dot{T}^* &= \frac{1}{\left[1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}^*\right]}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Los campos de radiación son

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{c}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial T^*}\dot{T}^*\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{V}^*}{c}\right)-\varphi\frac{\mathbf{a}^*}{c}\dot{T}^*\right] \\
&= \frac{e}{c^2R\left[1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}^*\right]^3}\left[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}^*)\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{V}^*}{c}\right)-\left[1-\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{V}^*}{c}\right]\mathbf{a}^*\right] \\
\mathbf{B} &= \mathbf{n}\times\mathbf{E}
\end{aligned} \tag{32}$$

como $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}=0$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi}E^2\mathbf{n} \\
&= \frac{e^2}{4\pi c^3 R^2\left[1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}^*\right]^6} \\
& \left[\left[1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}^*\right]^2 a^{*2} + 2\left[1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}^*\right](\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}^*)\left(\frac{\mathbf{V}^*}{c}\cdot\mathbf{a}^*\right)\right. \\
- & \left.\left[1-\frac{V^{*2}}{c^2}\right](\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}^*)^2\right] \qquad (33)
\end{aligned}$$

La intensidad radiada está concentrada en la región donde

$$1 - \frac{1}{c}\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}^* \ll 1 \tag{34}$$

o sea cuando **n** está en la dirección de **V**.

LOS TEMAS QUE VIENEN

- Radiación de sincotrón
- Dispersión por cargas libres
- Reacción de radiación
- Efecto Cherenkov