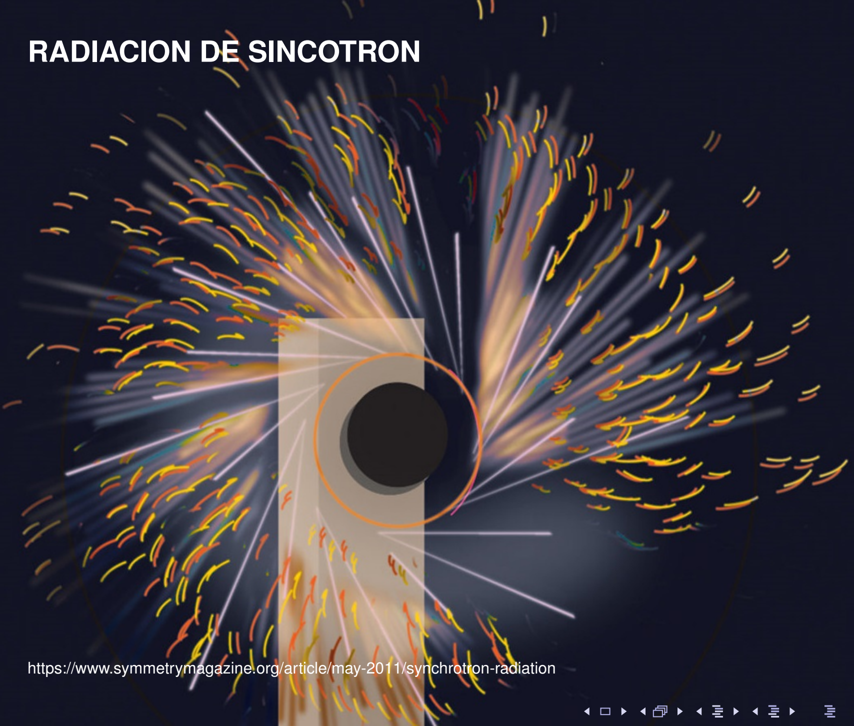
RADIACION DE SINCOTRON



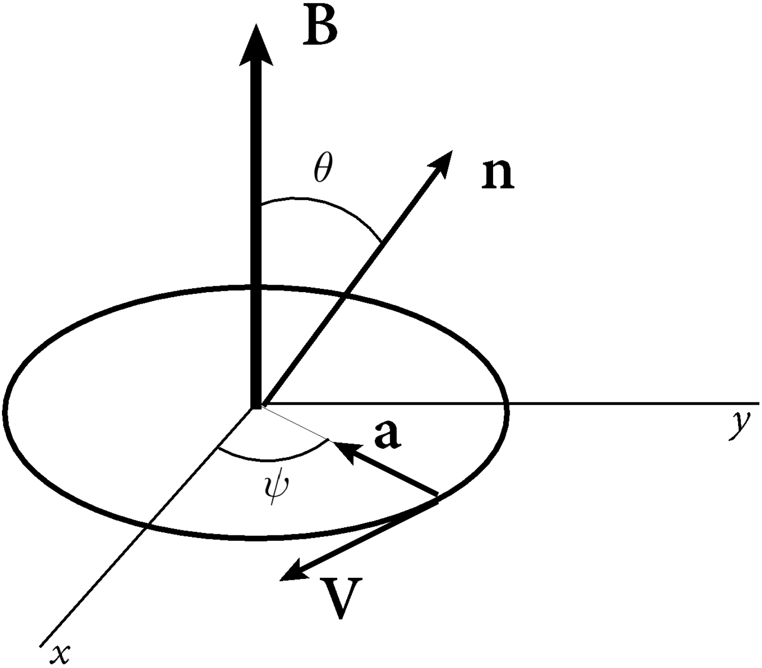
https://www.symmetrymagazine.org/article/may-2011/synchrotron-radiation

La *radiación de sincotrón* es la radiación emitida por una partícula en movimiento circular debido a la interacción con un campo magnético homogéneo. La fuerza de Lorentz

$$\frac{m\,\mathbf{a}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{B} \tag{1}$$

Por lo tanto $\mathbf{a} = \vec{\omega}\times\mathbf{V}$, donde la frecuencia $\vec{\omega} = -\omega\mathbf{K}$

$$\omega = \frac{eB}{mc}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{2}$$


B
θ
n
a
y
ψ
V
x

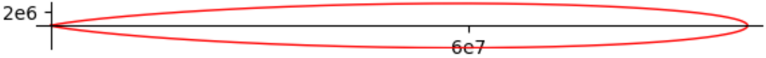
Escribimos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \cos\theta\ \mathbf{K} + \mathit{sin}\theta\,(\mathit{cos}\varphi\ \mathbf{I} + \sin\varphi\ \mathbf{J}) \\
\mathbf{V} &= V\,(\sin\psi\ \mathbf{I} - \cos\psi\ \mathbf{J}) \\
\mathbf{a} &= -\omega V\,(\cos\psi\ \mathbf{I} + \sin\psi\ \mathbf{J}) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}\cdot\mathbf{V} &= V\sin\theta\ \sin(\psi-\varphi) \\
\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} &= -\omega V\sin\theta\ \cos(\psi-\varphi) \\
\mathbf{V}\cdot\mathbf{a} &= 0 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

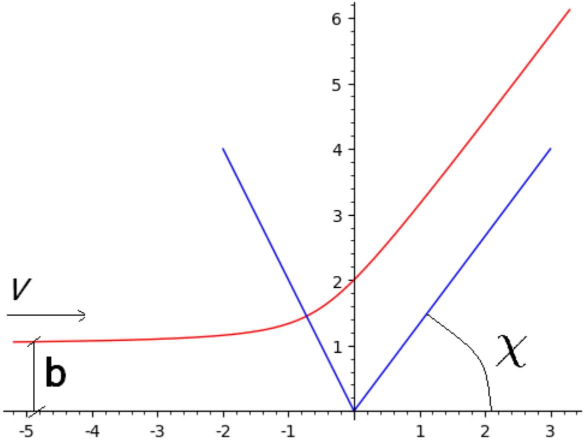
La intensidad emitida en la dirección de **n** es

$$S = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{1}{c}\left(\frac{e^2 BV}{mc^2}\right)^2 \frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left[1-\frac{V}{c}\sin\theta\ \sin\left(\psi-\varphi\right)\right]^6}$$
$$\left[\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\cos^2\theta + \left(\frac{V}{c} - \sin\left(\psi-\varphi\right)\ \sin\theta\right)^2\right] \tag{5}$$



Intensidad de radiación emitida en función de θ en la dirección de la velocidad, $V = 0{,}99\ c$

PERDIDAS POR RADIACION EN LA INTERACCION DE COULOMB



Solo vamos a mirar el caso no-relativista. Para una interacción repulsiva, las ecuaciones que describen la trayectoria son la conservación del impulso angular

$$L = mr^2\dot{\theta} = \mathrm{constante} \tag{6}$$

y la conservación de la energía

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} = \mathrm{constante} \tag{7}$$

Para el caso de repulsión E y α son positivos.

Parametrizamos

$$L = mbv_\infty, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \tag{8}$$

e introducimos variables adimensionales

$$\tau = \frac{v_\infty}{b}t, \quad \rho = \frac{r}{b} \tag{9}$$

con lo cual reducimos el problema a

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{\rho^2}, \quad \left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 = 1 - \frac{2\beta}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \tag{10}$$

donde

$$\beta = \frac{\alpha}{mbv_\infty^2} \tag{11}$$

Finalmente

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d\rho/dt}{d\theta/dt} = \rho^2\sqrt{1 - \frac{2\beta}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}} \tag{12}$$

o introduciendo una nueva variable

$$u = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{1 - 2\beta u - u^2} \tag{13}$$

con solución

$$u = -\beta + \sqrt{1+\beta^2}\sin\left(\theta - \frac{\chi}{2}\right) \tag{14}$$

donde

$$\tan\frac{\chi}{2} = \beta \tag{15}$$

Según la fórmula de Larmor, la energía total radiada es

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty} dt\ a^2 \tag{16}$$

La aceleración la deducimos de la Ley de Newton

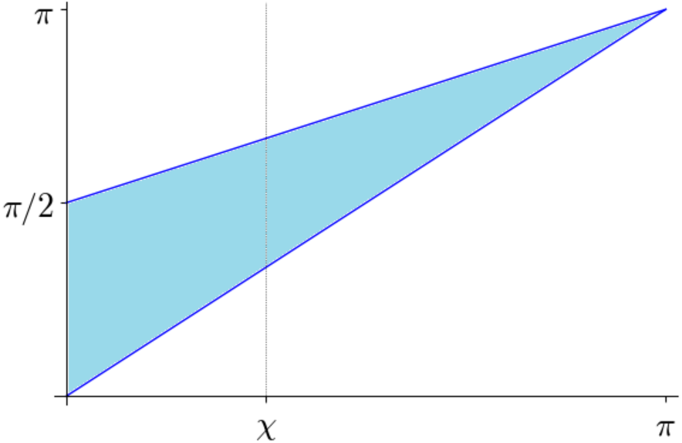
$$m\mathbf{a} = \frac{\alpha}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{17}$$

y para la medida de integración usamos

$$dt = \frac{b}{v_\infty}d\tau = \frac{b}{v_\infty}\frac{d\theta}{d\theta/d\tau} = \frac{b}{v_\infty}\rho^2 d\theta \tag{18}$$

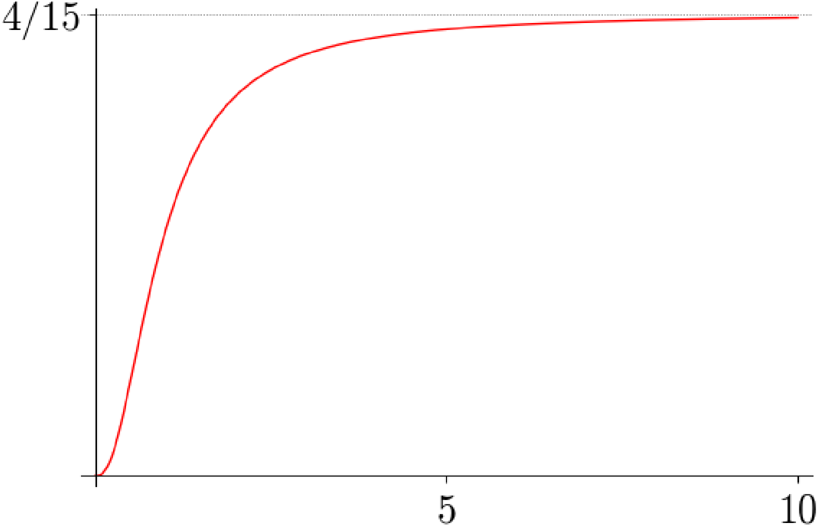
Finalmente

$$\Delta\mathcal{E} = 2\,\frac{2e^2}{3c^3}\,\frac{\alpha^2}{m^2 b^3 v_\infty}\int_\chi^{(\chi+\pi)/2} d\theta\; u^2 \qquad (19)$$



Calculando la integral

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{4}{3}\left(\frac{v_\infty}{c}\right)^3\left(\frac{e^2}{\alpha}\right)\beta^3\left[\left(1+3\beta^2\right)\tan^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)-3\beta\right] \quad (20)$$

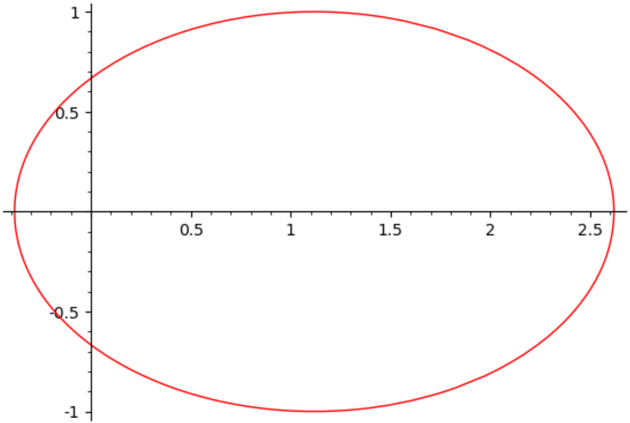


En el caso elíptico, la energía $\mathcal{E}$ y α son ambos negativos. Definiendo

$$\mathcal{E} = \frac{-1}{2} m v_\infty^2; \quad \beta = \frac{|\alpha|}{m b v_\infty^2} \tag{21}$$

ahora

$$u = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \cos\theta \tag{22}$$



LARMOR CONTRA BOHR

El caso de una órbita circular corresponde a $\beta = 1$. En este caso b es el radio de la órbita, y

$$\mathcal{E} = \frac{-1}{2} m v_{\infty}^{2} = -\frac{|\alpha|}{2b} \tag{23}$$

Por lo tanto, si

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} a^2 \tag{24}$$

Entonces

$$\frac{|\alpha|}{2b^2} \frac{db}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{\alpha^2}{m^2 b^4} \tag{25}$$

Si la órbita comienza con radio b_0 en $t = 0$, entonces

$$\left(\frac{b}{b_0}\right)^3 = 1 - \frac{4e^2}{3c^3} \frac{|\alpha|\, t}{m^2 b_0^3} \tag{26}$$

y la órbita colapsa en un tiempo finito.

En el modelo de Bohr, $|\alpha| = e^2$, y la condición de cuantificación

$$L = \hbar \tag{27}$$

Impone la condición inicial

$$b_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \tag{28}$$

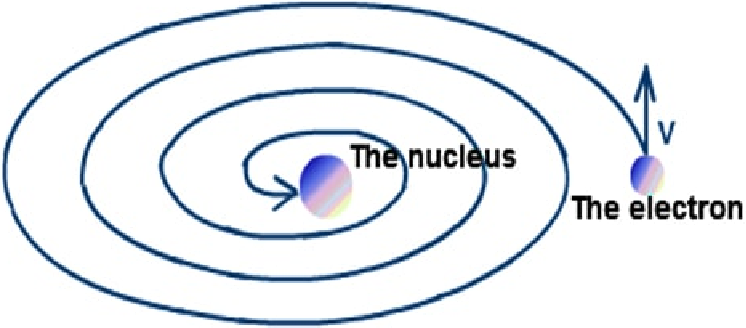
que corresponde a una energía

$$\mathcal{E} = \frac{-1}{2}\frac{e^2}{b_0} = \frac{-1}{2}mc^2\alpha^2 \tag{29}$$

con $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ la constante de estructura fina. La energía en reposo del electrón es 10^{-13} J.

Por lo tanto, encontramos que la órbita colapsaría en un tiempo

$$\Delta t = \frac{3c^3 m^2 b_0^3}{4e^4} = \frac{3c^3 \hbar_0^6}{4me^{10}} = \frac{3}{4}\frac{\hbar}{mc^2\alpha^5} \approx 4\ 10^{-11}\mathrm{s} \tag{30}$$



Mientras tanto, la velocidad angular

$$\frac{1}{2} m b^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{b} \tag{31}$$

o bien

$$\dot{\theta} = \frac{e}{\sqrt{m b_0^3}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t}{\Delta t}}} \tag{32}$$

Por lo tanto, durante el colapso el electrón completa N órbitas

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Delta t} dt \, \dot{\theta} = \frac{e \Delta t}{\pi \sqrt{m b_0^3}} \tag{33}$$

Reemplazando

$$N = \frac{3}{4\pi\alpha^3} \approx 6 \; 10^5 \tag{34}$$

FORMULA DE LARMOR EN EL CASO RELATIVISTA

Aunque la fórmula de Larmor es no relativista, siempre se la puede aplicar en el referencial donde $\mathbf{V}^* = 0$. Además, habíamos visto que en ese referencial no hay una transferencia neta de impulso. Por lo tanto, podemos definir un tetravector *radiación de energía$-$impulso* por la condición de que, en el referencial en reposo

$$\Delta P^\mu = \left(\frac{1}{c}\Delta\mathcal{E}, 0\right) = \frac{2e^2}{3c^4}a^2\,(1, 0) \tag{35}$$

Ahora, reconocemos que $(1, \mathbf{0})$ son las componentes de la tetravelocidad u^μ en el referencial en reposo, mientras que

$$a^2 = a_\mu a^\mu \tag{36}$$

donde

$$\bar{a}^\mu = c \frac{du^\mu}{d\tau} \tag{37}$$

es la *tetraaceleración*[1], cuyas componentes en el referencial en reposo con $a^\mu = (0, \mathbf{a})$. De esa manera reconocemos la *fórmula de Larmor relativista*

$$\Delta P^\mu = \frac{2e^2}{3c^4} \bar{a}_\rho \bar{a}^\rho u^\mu \tag{38}$$

[1] Ver clase 17

En el referencial del laboratorio

$$
\begin{aligned}
\bar{a}^0 &= \frac{c}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\
&= \frac{1}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2}\left(\frac{\mathbf{V}}{c}\cdot\mathbf{a}\right) \\
\bar{\mathbf{a}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\
&= \frac{\mathbf{a}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)} + \frac{\mathbf{V}}{c\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2}\left(\frac{\mathbf{V}}{c}\cdot\mathbf{a}\right) \qquad (39)
\end{aligned}
$$

$$
\bar{a}_\rho\bar{a}^\rho = \bar{\mathbf{a}}^2 - \bar{a}^{02} = \frac{a^2 - \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{V}\times\mathbf{a}\right)^2}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^3} \qquad (40)
$$

Por ejemplo, consideremos la partícula con movimiento uniformemente acelerado[2] $\bar{a}_\rho \bar{a}^\rho = \text{constante}$.
En el referencial en el que la partícula está en reposo en $t = 0$ la trayectoria es $x = y \equiv 0$,

$$\begin{aligned} z &= \frac{c^2}{a}\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \\ V_z &= \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \\ a_z &= \frac{a}{\left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}\right)^{3/2}} = a\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2} \qquad (41) \end{aligned}$$

Efectivamente $\bar{a}_\rho \bar{a}^\rho = a^2$

[2] ver clase 17

Por lo tanto, concluímos que la partícula uniformemente acelerada radía a una tasa

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3}a^2 u^0 = -\frac{2e^2}{3c^3}a^2 \left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}\right)^{1/2} \tag{42}$$

...que parece un montón, no?

Sin embargo, una larga lista de autoridades, incluyendo a Max Born, Wolfgang Pauli[3] y Richard Feynman[4] han afirmado que *una carga uniformemente acelerada no radía*.

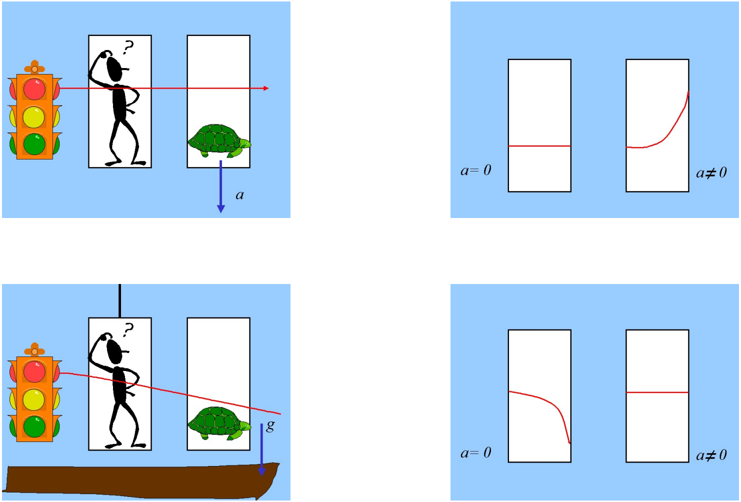
---

[3] W. Pauli, *Theory of Relativity* (Pergamon Press, Londres (1958)), p. 92

[4] R. Feynman, *Feynman Lectures on Gravitation* (Addison−Wesley, Nueva York (1995)), p. 123.

Born, Pauli y Feynman estaban preocupados por el *Principio de Equivalencia*.

El principio de equivalencia afirma que es imposible distinguir localmente entre un referencial no-inercial y uno inercial pero sometido a un campo gravitatorio



Juega un rol fundamental en la Teoría de la Relatividad General, ya que pone en pie de igualdad a todos los observadores.

Eugène Delacroix, *La Libertad guiando al pueblo* (1830).

Es posible dar argumentos puramente electrodinámicos en favor de la postura de que una carga uniformemente acelerada no radía. Básicamente, uno trata de ver cómo se comportan los campos a grandes distancias, digamos en $t = 0$. Estos campos habrían sido generados en el pasado lejano, $T^* \to -\infty$, $Z^* \to \infty$, $\mathbf{V}^* \approx -c\left(1 - \left(c^2/a^2t^2\right)\right)\mathbf{K}$. pero en esa región la aceleración está fuertemente suprimida, por lo cual se puede cuestionar si realmente existe una *zona de radiación*[5].

[5]Se puede hacer la cuenta a partir de las fórmulas de la clase 21. Habría un campo eléctrico muy intenso concentrado alrededor del eje z negativo, pero es un campo longitudinal, no transverso como uno espera de un campo de radiación. Ver también el libro de Pauli.

En este momento, la posición de consenso parece ser que un observador inercial ve que una carga uniformemente acelerada radía, del mismo modo que un observador en caída libre en un campo gravitatorio vería radiar a una carga estacionaria. En cambio, un observador estacionario en un campo gravitatorio no vería radiar a una carga estacionaria, y por lo tanto un segundo observador acelerado en un sistema inercial tampoco vería radiar a una carga acelerada. De esa manera se respeta el principio de equivalencia.

Para una discusión en profundidad de este tema, ver Stephen N. Lyle, *Uniformly Accelerating Charged Particles* (Springer, Berlín (2008)).

Para un tratamiento más accesible, ver R. Peierls, *Surprises in Theoretical Physics* (Princeton U. P., Princeton (1979)).

Para enterarse de qué se trata, ver R. A. W. Bradford, *Does a uniformly accelerating charge radiate?*, en línea, http://www.rickbradford.co.uk/ChoiceCuts.html (2011).

La clase que viene vamos a ver dispersión de Thomson