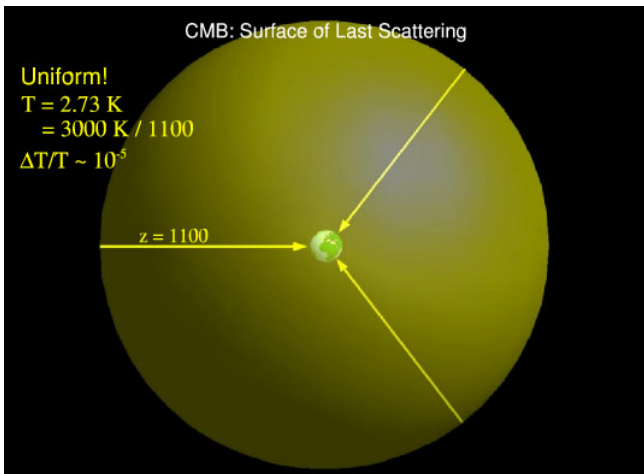
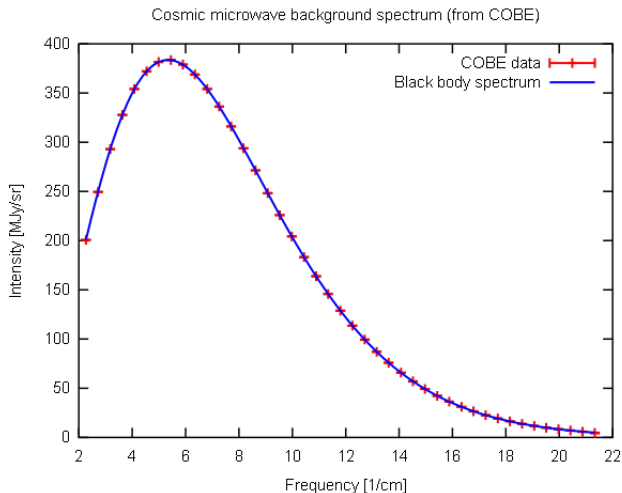


DISPERSION DE THOMSON Y RADIACION COSMICA DE FONDO

La radiación cósmica de fondo es radiación de origen primordial, con un espectro de cuerpo negro a una temperatura de 3 K.



PORQUE EL FONDO COSMICO DE RADIACION TIENE UN ESPECTRO DE CUERPO NEGRO?¹



¹S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley, New York (1972)), c. 15, sección 4.

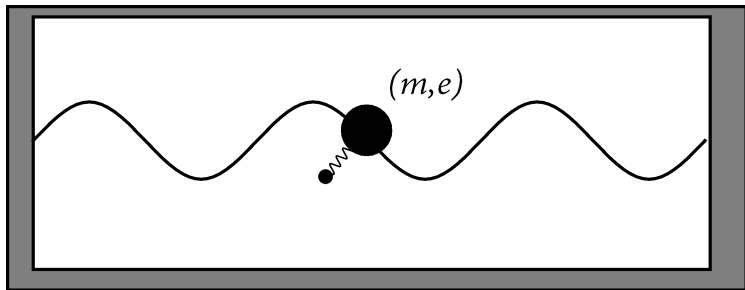
RADIACION DE CUERPO NEGRO

El espectro de energía de radiación en equilibrio térmico sigue una ley universal. Además, la densidad de energía por unidad de frecuencia obedece la *Ley de desplazamiento de Wien*²

$$\rho_{\omega} \propto \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (1)$$

²M. Planck, *The theory of heat radiation* (Blakinston's, Philadelphia (1914)).

Para deducir la forma de la función universal f , Wien consideró las propiedades de radiación en equilibrio con un oscilador en una cavidad espejada de volumen V .



Wien asumió que la radiación y los osciladores intercambiaban energía en “paquetes” de tamaño ϵ .

Consideremos un único modo de radiación de frecuencia ω . La absorción de radiación se produce cuando el oscilador, que tiene energía E_0 , absorbe un paquete y pasa a un estado de energía $E_0 + \epsilon$. La tasa de este proceso es

$$p_{E_0 \rightarrow E_0 + \epsilon} n_\omega P_{E_0} \quad (2)$$

donde n_ω es la cantidad de “paquetes” en ese modo de radiación, P_{E_0} es la probabilidad de que el oscilador tenga energía E_0 , y $p_{E_0 \rightarrow E_0 + \epsilon}$ es la probabilidad de absorción por unidad de tiempo, dado el par paquete–oscilador.

En equilibrio, la tasa de este proceso debe ser igual a la tasa de su inverso temporal. Wien consideró que el inverso temporal era la emisión de un “paquete” por un oscilador de energía $E_0 + \epsilon$. Esta tasa es proporcional a

$$\rho_{E_0+\epsilon \rightarrow E_0} P_{E_0+\epsilon} \quad (3)$$

Wien asumió que el proceso, desde el punto de vista microscópico, era reversible, y por lo tanto

$$\rho_{E_0 \rightarrow E_0+\epsilon} = \rho_{E_0+\epsilon \rightarrow E_0} \quad (4)$$

Si los osciladores obedecen la distribución de Boltzmann, el número de paquetes por modo

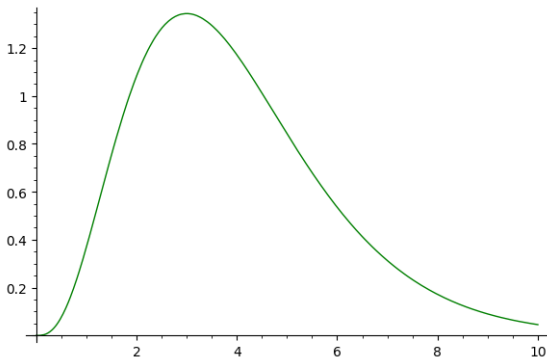
$$n_\omega = \frac{P_{E_0+\epsilon}}{P_{E_0}} = e^{-\epsilon/k_B T} \quad (5)$$

Considerando que hay $4\pi V\omega^2 d\omega/c^3$ modos con frecuencia entre ω y $\omega + d\omega$, y que cada paquete tiene energía ϵ , encontramos el espectro

$$\rho_\omega \propto \frac{4\pi}{c^3} \omega^2 \epsilon e^{-\epsilon/k_B T} \quad (6)$$

Comparando con la Ley de desplazamiento, encontramos que $\epsilon \propto \omega$, de donde la *distribución de Wien*

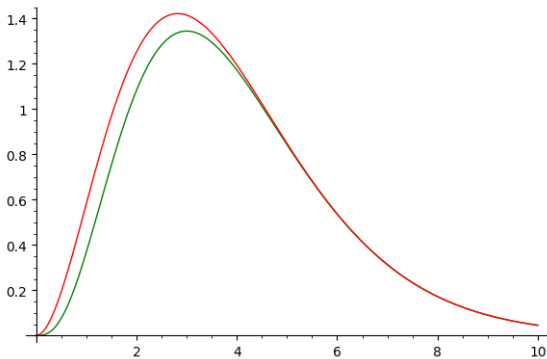
$$\rho_{\omega} = \frac{4\pi\omega^2}{c^3} \hbar\omega e^{-\hbar\omega/k_B T} \quad (7)$$



El argumento de Wien es incorrecto porque el espectro de energía sigue la *Ley de Planck*

$$\rho_{\omega} = \frac{4\pi\omega^2}{c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (8)$$

que se reduce a la Ley de Wien cuando $\hbar\omega \gg k_B T$



Fue Einstein³ el que encontró el error del análisis de Wien. La presencia de radiación “estimula” la emisión de más radiación, de modo que la tasa de emisión no es $\rho_{E_0+\epsilon \rightarrow E_0} P_{E_0+\epsilon}$, si no

$$\rho_{E_0+\epsilon \rightarrow E_0} P_{E_0+\epsilon} (1 + n_\omega) \quad (9)$$


De esta manera

$$n_\omega = \frac{1}{e^{\epsilon/k_B T} - 1} \quad (10)$$

Multiplicando por la densidad de modos y la energía ϵ por paquete, y aceptando, como Wien, que $\epsilon = \hbar\omega$, encontramos la Ley de Planck.

³A. Einstein, *Emission and Absorption of Radiation in Quantum Theory*, Deutsche Physikalische Gesellschaft. Verhandlungen 18 (1916); traducido al inglés y reimpresso en Alfred Engel, Translator, y Engeibert Schucking, Consultant, *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 6, The Berlin Years: Writings, 1914–1917* (Princeton University Press, 1997)

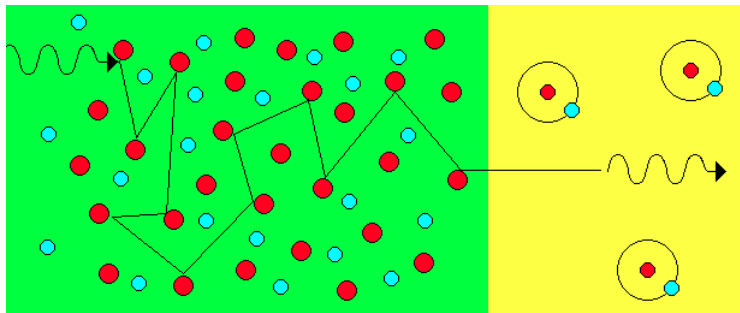
Ahora podemos decir que la *emisión estimulada* se produce porque los fotones son partículas indistinguibles⁴. La probabilidad de un proceso se suma sobre los estados finales pero se promedia sobre los estados iniciales. El estado final de $n_\omega + 1$ fotones puede provenir de cualquiera de $(n_\omega + 1)!$ estados clásicos (distinguibles) distintos, pero por otro lado promediar sobre los estados iniciales posibles significa dividir por un factor de $n_\omega!$. Del cociente de estos dos factores sale la amplificación de la probabilidad por el factor $n_\omega + 1$

⁴R. Feynman, *The Feynman lectures on Physics*, Vol III, sección 4.3, en línea, https://www.feynmanlectures.caltech.edu/III_04.html 

MIENTRAS TANTO, EN LA SUPERFICIE DE ULTIMA DISPERSION...

Consideramos un haz de radiación que nos llega en una dirección bien definida. La pregunta es cómo varía la densidad de fotones que *hoy* tienen frecuencia ω , en función del tiempo.

⁵.



⁵ Aún en ausencia de interacciones, la densidad de fotones varía debido a la expansión del Universo. Para simplificar no vamos a tener en cuenta ese efecto

Supongamos que en un momento dado un modo determinado en el haz contiene n_ω fotones. Debido a la interacción con electrones libres, algunos de esos fotones van a ser absorbidos, y por otro lado se emitirán fotones nuevos. Considerando la emisión estimulada, podemos escribir

$$\frac{dn_\omega}{dt} = n_e(t) \{ \Lambda(t) (1 + n_\omega) - \Omega(t) n_\omega \} \quad (11)$$

Donde n_e es la densidad de electrones libres, Λ es la probabilidad de emisión, y Ω la de absorción.

Si los fotones estuvieran en equilibrio con los electrones, ambos procesos se compensarían, por lo que debe ser

$$\Lambda(t) \left[1 + \frac{1}{e^{\hbar\omega(t)/k_B T_e(t)} - 1} \right] = \frac{\Omega(t)}{e^{\hbar\omega(t)/k_B T_e(t)} - 1} \quad (12)$$

$\omega(t)$ es la frecuencia que tenía en el tiempo t un fotón que ahora tiene frecuencia ω , y $T_e(t)$ es la temperatura *de los electrones libres* en el tiempo t . Simplificando esta expresión, encontramos

$$\Lambda(t) = e^{-\hbar\omega(t)/k_B T_e(t)} \Omega(t) \quad (13)$$

La ecuación original

$$\frac{dn_{\omega}}{dt} = n_e(t) \{ \Lambda(t) (1 + n_{\omega}) - \Omega(t) n_{\omega} \} \quad (14)$$

se reduce a

$$\frac{dn_{\omega}}{dt} + \frac{1}{\tau(t)} n_{\omega} = P(t) \quad (15)$$

donde

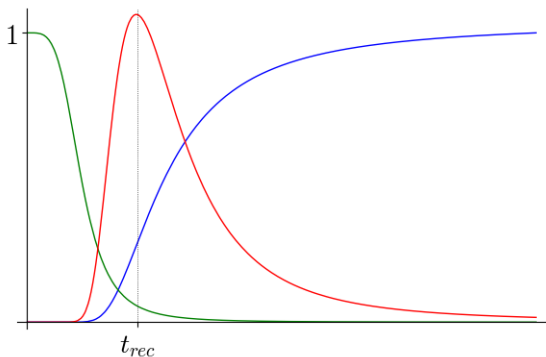
$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau(t)} &= n_e(t) \Omega(t) \left[1 - e^{-\hbar\omega(t)/k_B T_e(t)} \right] \\ P(t) &= n_e(t) \Omega(t) e^{-\hbar\omega(t)/k_B T_e(t)} \end{aligned} \quad (16)$$

La solución es

$$n_{\omega}(\text{hoy}) = \int_{-\infty}^{\text{hoy}} dt' e^{-\int_{t'}^{\text{hoy}} dt'' / \tau(t'')} P(t') \quad (17)$$

Pero

$$P(t') = \frac{1}{e^{\hbar\omega(t)/k_B T_e(t)} - 1} \frac{1}{\tau(t)} \quad (18)$$

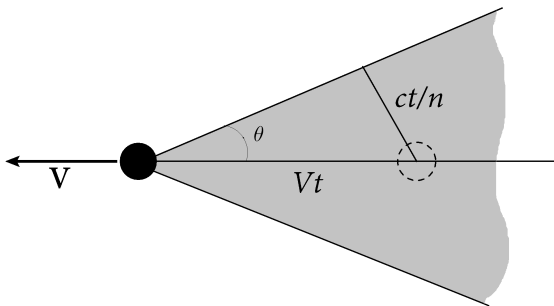


Por lo tanto

$$\begin{aligned} n_{\omega}(\text{hoy}) &= \int_{-\infty}^{\text{hoy}} dt' \frac{1}{e^{\hbar\omega(t')/k_B T_e(t')} - 1} \frac{d}{dt'} e^{-\int_{t'}^{\text{hoy}} dt''/\tau(t'')} \\ &\approx \frac{1}{e^{\hbar\omega(t_{rec})/k_B T_e(t_{rec})} - 1} \end{aligned} \quad (19)$$

EL EFECTO CERENKOV

Llamamos efecto Cerenkov a la radiación que se produce cuando una partícula cargada atraviesa un medio material de coeficiente de refracción n a una velocidad V superior a la velocidad c/n de la luz en el medio. La radiación está contenida en un cono con vértice en la partícula y apertura $\sin \theta = c/nV$.



El efecto Cerenkov puede utilizarse para medir la velocidad de partículas cargadas, así como fuente de radiación coherente⁶.

⁶B. Johnson y J. Walsh, *A Cherenkov infrared laser*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A237 (1985) 239-243.

Para investigar el mecanismo de la radiación Cerenkov, vamos a pararnos en el referencial en que la partícula está en reposo⁷. En este referencial, las relaciones constitutivas son⁸

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \mathbf{D} &= \epsilon \left[\mathbf{E}^* - \frac{\mathbf{V}}{c^2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}^*) \right] - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{H}^* \\ \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \mathbf{B} &= \mu \left[\mathbf{H}^* - \frac{\mathbf{V}}{c^2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}^*) \right] + \frac{\mathbf{V}}{c} \times \mathbf{E}^* \end{aligned} \quad (20)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^* &= \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{H}^* &= \mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{D} \end{aligned} \quad (21)$$

⁷J. van Bladel, *Relativity and Engineering* (Springer, Berlín (1984)).

⁸Ver clase 18.

En este referencial, el campo es estacionario y no hay corriente eléctrica, por lo cual las leyes de Faraday y de Ampère-Maxwell se reducen a

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi \\ \nabla \times \mathbf{H} &= 0\end{aligned}\tag{22}$$

La solución que estamos buscando corresponde a $\mathbf{H} = 0$.
Entonces

$$\mathbf{D} = \frac{-\epsilon}{\left(1 - \epsilon\mu \frac{V^2}{c^2}\right)} \left[\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \nabla\phi - (\epsilon\mu - 1) \frac{\mathbf{V}}{c} \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \nabla\phi\right) \right]\tag{23}$$

Si $\mathbf{V} = V\mathbf{I}$, entonces

$$\mathbf{D} = -\epsilon \left\{ \partial_x \phi \mathbf{I} - \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(\epsilon\mu \frac{V^2}{c^2} - 1\right)} [\partial_y \phi \mathbf{J} + \partial_z \phi \mathbf{K}] \right\} \quad (24)$$

y por lo tanto la Ley de Gauss

$$\partial_x^2 \phi - \eta^2 [\partial_y^2 \phi + \partial_z^2 \phi] = -\frac{4\pi}{\epsilon} q \delta(\mathbf{x}) \quad (25)$$

$$\eta^2 = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(\epsilon\mu \frac{V^2}{c^2} - 1\right)} \quad (26)$$

El caso que nos interesa es cuando $\eta^2 > 0$.

En este caso, la Ley de Gauss toma la forma de una “ecuación de ondas” en dos dimensiones espaciales (y, z), mientras x juega el papel de “tiempo” y η es la velocidad de propagación

$$\frac{-1}{\eta^2} \partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi + \partial_z^2 \phi = \frac{4\pi}{\epsilon \eta^2} q \delta(\mathbf{x}) \quad (27)$$

La solución que estamos buscando cumple

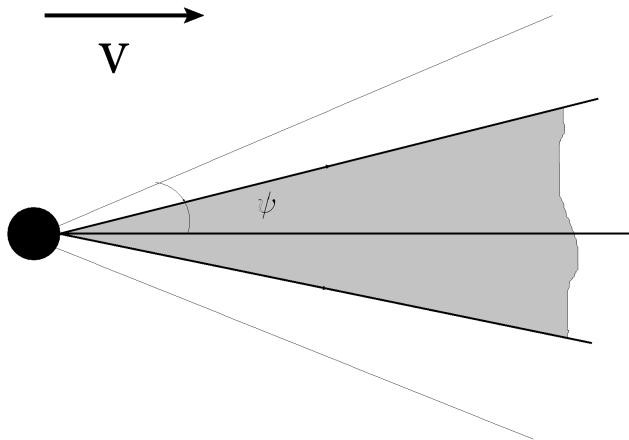
$$\begin{aligned} \phi(x=0, y, z) &= 0 \\ \partial_x \phi(x=0, y, z) &= \frac{-4\pi}{\epsilon} q \delta(y) \delta(z) \end{aligned} \quad (28)$$

La solución que estamos buscando es invariante frente a

- ▶ Rotaciones en el plano (y, z) , y
- ▶ “Transformaciones de Lorentz” con $0 < v < \eta$

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - \frac{v}{\eta}y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\eta^2}}} \\y' &= \frac{y - \frac{v}{\eta}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\eta^2}}}\end{aligned}\tag{29}$$

Por lo cual automáticamente la solución va a ser cero fuera del “cono de la luz” $\eta x \geq r$, $r = \sqrt{y^2 + z^2}$.



$$\sin \psi = \frac{c}{nV} \sqrt{\frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{1}{n^2}}}; \quad n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (30)$$

Concretamente, la solución es

$$\phi = -\frac{4\pi q}{\eta\epsilon} \int \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_{\perp}\mathbf{x}_{\perp}} \frac{\sin(\eta k_{\perp} x)}{k_{\perp}} \theta(x) \quad (31)$$

$\mathbf{x}_{\perp} = (y, z)$, o, haciendo explícitamente la integral

$$\phi = -\frac{q}{\eta\epsilon} \frac{1}{\sqrt{\eta^2 x^2 - r^2}} \theta(\eta^2 x^2 - r^2) \quad (32)$$

Para transformar los campos al sistema de laboratorio necesitamos también el potencial vector. El campo \mathbf{B} es

$$\mathbf{B} = \frac{(\epsilon\mu - 1)}{\left(1 - \epsilon\mu \frac{V^2}{c^2}\right)} \frac{\mathbf{V}}{c} \times \nabla\phi = \nabla \times \mathbf{a} \quad (33)$$

donde \mathbf{a} es el potencial vector

$$\mathbf{a} = \eta'^2 \phi \frac{\mathbf{V}}{c} \quad (34)$$

$$\eta'^2 = \frac{(\epsilon\mu - 1)}{\left(\epsilon\mu \frac{V^2}{c^2} - 1\right)} \quad (35)$$

Observamos que $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0$.

En el referencial del laboratorio,

$$\begin{aligned}\Phi &= \gamma \left(\phi - \frac{V}{c} a \right) \\ A_x &= \gamma \left(-\frac{V}{c} \phi + a \right) \\ \mathbf{A}_\perp &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{36}$$

donde el lado derecho es evaluado en

$$\begin{aligned}t &= \gamma \left(T + \frac{V}{c^2} X \right) \\ x &= \gamma (X + VT) \\ \mathbf{x}_\perp &= \mathbf{X}_\perp\end{aligned}\tag{37}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Phi &= \gamma \left(1 - \eta'^2 \frac{V^2}{c^2} \right) \phi = -\gamma \eta^2 \phi \\ A_x &= \gamma \frac{V}{c} \left(\eta'^2 - 1 \right) \phi = \gamma \epsilon \mu \frac{V}{c} \eta^2 \phi \\ \mathbf{A}_\perp &= 0\end{aligned}\tag{38}$$

donde (cfr. ec. (31))

$$\phi = -\frac{4\pi q}{\eta\epsilon} \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} \frac{\sin(\gamma \eta k_\perp (X + VT))}{k_\perp} \theta(x)\tag{39}$$

Por lo tanto tenemos una superposición de ondas que se propagan en la dirección

$$\mathbf{K} = (-\gamma\eta\mathbf{k}_\perp, \pm\mathbf{k}_\perp) \quad (40)$$

con

$$K = \sqrt{1 + \gamma^2\eta^2} k_\perp = \sqrt{\frac{\epsilon\mu \frac{V^2}{c^2}}{\left(\epsilon\mu \frac{V^2}{c^2} - 1\right)}} k_\perp \quad (41)$$

y frecuencia

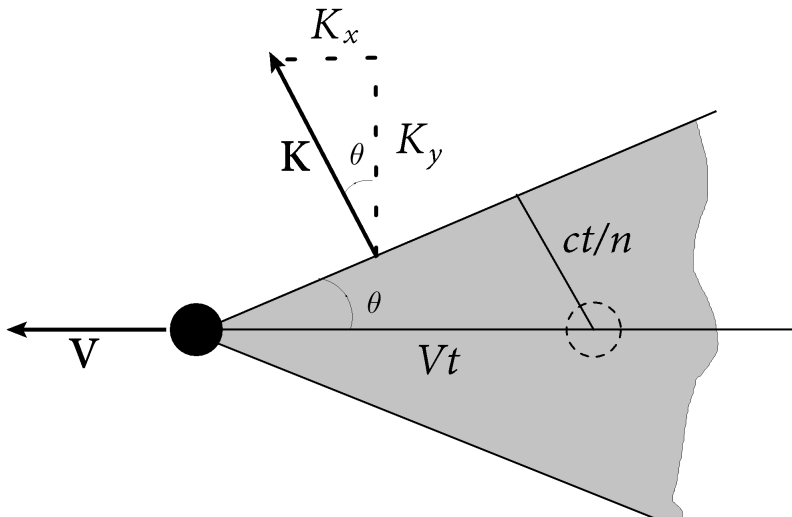
$$\Omega = V\gamma\eta k_\perp = \frac{V}{\sqrt{\epsilon\mu \frac{V^2}{c^2} - 1}} k_\perp \quad (42)$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación es

$$C = \frac{\Omega}{K} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (43)$$

La dirección de propagación forma con el eje Y el mismo ángulo que el frente de onda forma con el eje X, es decir

$$\tan \theta = \frac{-K_x}{K_y} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu \frac{V^2}{c^2} - 1}} \quad (44)$$



Entonces

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu} V} \quad (45)\end{aligned}$$

como esperábamos.

La clase que viene
vamos a ver reacción
de radiación

