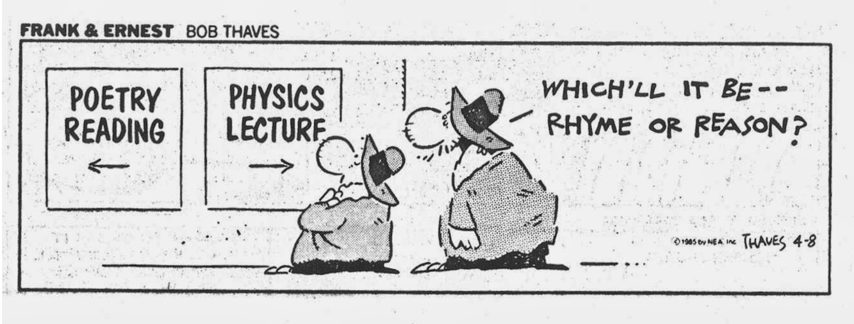
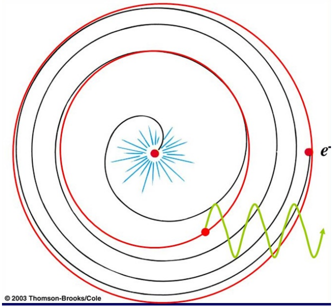
REACCION DE RADIACION



En la clase 21 vimos que una partícula cargada acelerada radía campos electromagnéticos. La potencia total radiada, en el límite no-relativista, está dada por la fórmula de Larmor

$$W = \frac{2e^2}{3c^3}\, a^2 \tag{1}$$

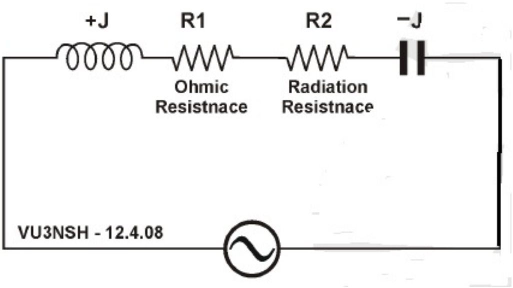
donde a es la aceleración de la partícula. La energía de los campos de radiación se deduce de la energía de la partícula. Como consecuencia, por ejemplo, una órbita elíptica en un potencial Coulombiano es inestable (clase 22).



Lo mismo ocurre en sistemas extensos de cargas. Por ejemplo, para modelar el circuito equivalente de una antena, es necesario incluir una *resistencia de radiación R* tal que

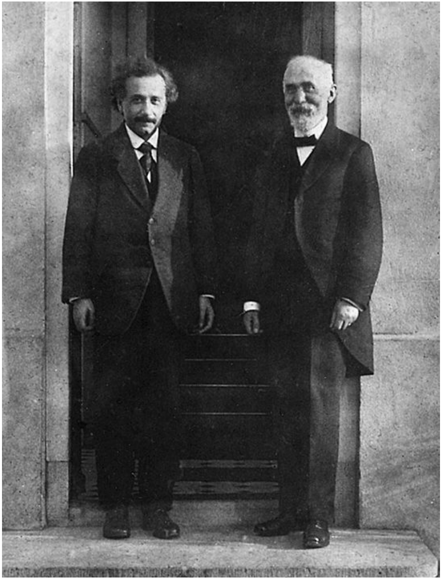
$$S = \frac{1}{2} R \, |I_0|^2 \qquad (2)$$

donde W es la potencia radiada e I_0 es la corriente en las terminales de la antena[1]



[1] Kirk T. McDonald, *The Radiation-Reaction Force and the Radiation Resistance of Small Antennas*, en línea, http://www.hep.princeton.edu/ mcdonald/examples/resistance.pdf

La pregunta es si es posible modelar este efecto agregando un término adecuado a la ecuación de movimiento de una partícula cargada.



Albert Einstein (1879-1955) y Henrik Lorentz (1853-1928) fotografiados por Paul Ehrenfest (1880-1933) en 1921

REACCION DE RADIACION SOBRE UN OSCILADOR

En la clase 23 consideramos la interacción de un oscilador con el campo electromagnético. En dominio frecuencia, la ecuación del oscilador es

$$-\omega^2 \mathbf{x} - i\gamma\omega\mathbf{x} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_\omega \tag{3}$$

Para que la potencia absorbida fuera igual a la potencia emitida era necesario que

$$\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3}\omega^2 \tag{4}$$

Si adoptamos este valor, la ecuación de movimiento (en dominio tiempo) queda

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} - \Gamma\frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3} + m\omega_0^2\mathbf{x} = e\mathbf{E} \tag{5}$$

$\Gamma = 2e^2/3c^3$. El nuevo término disipativo fue propuesto por Lorentz, Planck, Poincaré y Abraham[2].

[2] Kirk T. McDonald, *On the History of the Radiation Reaction*, en línea, http://www.hep.princeton.edu/ mcdonald/examples/selfforce.pdf

Esto equivale a una fuerza

$$F_{RR} = +\Gamma \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3} \tag{6}$$

actuando sobre la partícula. Si el movimiento de la partícula es periódico, el trabajo entregado por esta fuerza en un ciclo es

$$W = \oint dt\, \Gamma \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{7}$$

Integrando por partes

$$W = -\oint dt\, \Gamma \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)^2 \tag{8}$$

que reconocemos como la integral de la potencia emitida según la fórmula de Larmor.

Sin embargo, la ecuación (5) es extremadamente patológica.

Empecemos buscando las soluciones en ausencia de campo aplicado. Proponiendo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}$ obtenemos

$$\lambda^3 - \frac{m}{\Gamma}\left(\lambda^2 + \omega_0^2\right) = 0 \tag{9}$$

Las soluciones son

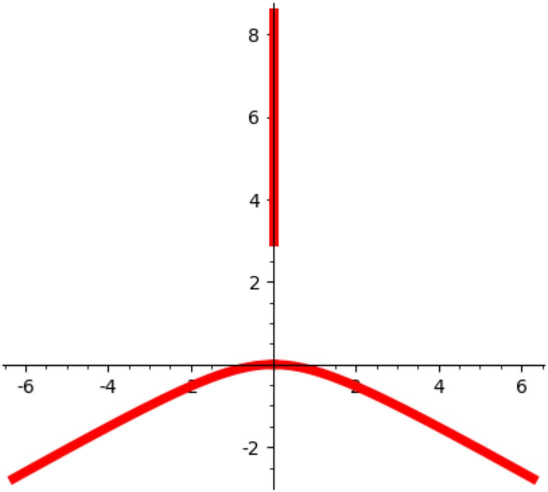
$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{m}{3\Gamma}\left[1 + 2\cosh\chi\right] \\ \lambda_\pm &= \frac{m}{3\Gamma}\left[1 - \cosh\chi \pm i\sqrt{3}\sinh\chi\right] \end{aligned} \tag{10}$$

donde

$$\cosh 3\chi = 1 + \frac{27\Gamma^2\omega_0^2}{2m^2} \tag{11}$$

Vemos que para cualquier combinación de parámetros hay

- Una raíz λ_0 real y positiva, y
- Dos raíces $\lambda_\pm$ complejas. La parte real de ambas es siempre no positiva, por lo cual estas soluciones representan oscilaciones amortiguadas



El tiempo $\Gamma/m \approx \left(e^2/mc^2\right)/c$ es el tiempo en que la luz atraviesa el radio clásico de la partícula. Por lo tanto, en general $\Gamma\omega_0/m \ll 1$. En este límite $\chi \approx \sqrt{3}\,\Gamma\omega_0/m$, y

$$\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0 - \frac{\Gamma}{m}\omega_0^2 \tag{12}$$

representa un pequeño amortiguamiento de las oscilaciones naturales del oscilador, que es lo que esperábamos encontrar. Por otro lado

$$\lambda_0 \approx \frac{m}{\Gamma} \gg \omega_0 \tag{13}$$

EL PROBLEMA CON λ_0

Para ver porqué la raíz real y positiva λ_0 es un problema, consideremos la respuesta a un escalón

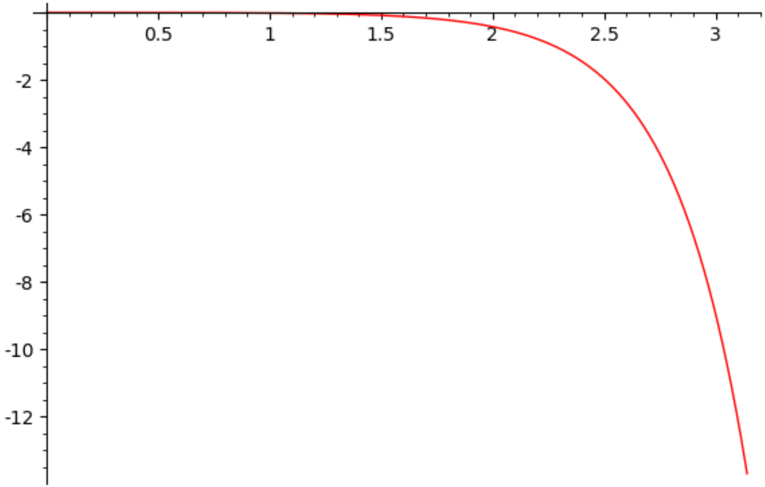
$$m\frac{d^2x}{dt^2} - \Gamma\frac{d^3x}{dt^3} + m\omega_0^2 x = m\omega_0^2\theta(t) \tag{14}$$

La solución es

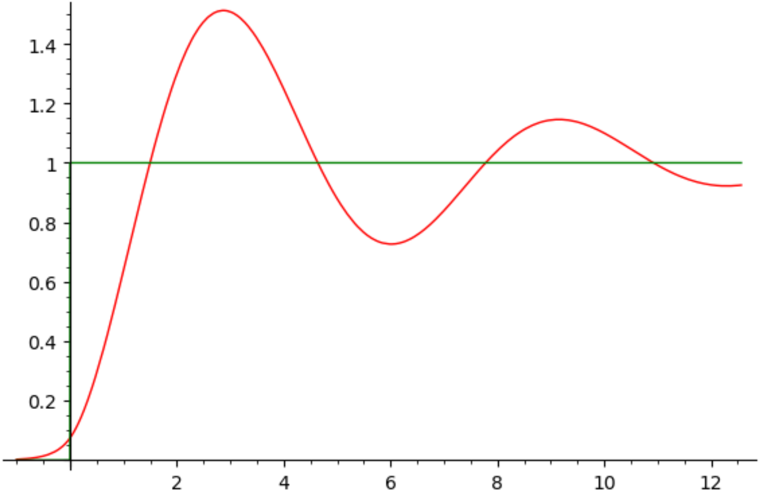
$$\begin{aligned} x &= A_0 e^{\lambda_0 t} + A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}; \quad t < 0 \\ x &= 1 + A_0' e^{\lambda_0 t} + A_+' e^{\lambda_+ t} + A_-' e^{\lambda_- t}; \quad t > 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Las condiciones de ligadura son la continuidad de x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ en $t = 0$.

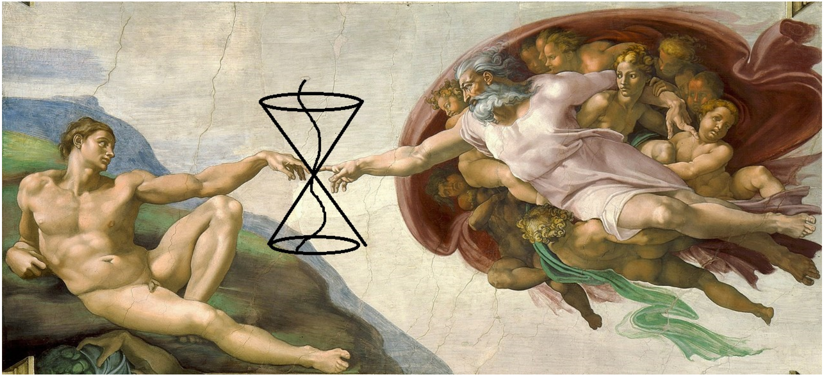
El problema es que según las condiciones de ligadura, la diferencia $A_0 - A_0'$ no puede ser cero. Por lo tanto, si imponemos condiciones de contorno causales $A_0 = A_+ = A_- = 0$, la exponencial creciente tiene una amplitud no nula para $t > 0$, dando lugar a un comportamiento explosivo.



Si en cambio imponemos como condición de contorno que $A'_0 = 0$, el comportamiento para $t > 0$ es una oscilación amortiguada (como se espera), pero la solución es acausal: el oscilador comienza a moverse *antes* de que se encienda el escalón.



Esto demuestra que el criterio de recuperar la fórmula de Larmor en promedio no es suficiente. Es necesario examinar más en detalle el proceso de emisión de radiación.



El problema es que eso nos lleva a considerar los campos de una carga en el punto en que se encuentra la misma carga, que no están bien definidos.

La manera que encontraron Abraham y Lorentz de evadir esta dificultad fue considerar una distribución de carga finita, evaluar su autocampo y luego recuperar el caso de una partícula mediante algún paso al límite.

Max Abraham (1875-1922)

La idea es

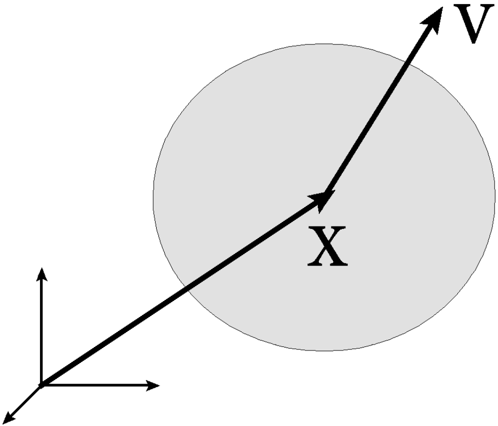
- Para una distribución de cargas razonablemente simple, encontrar los campos en cada punto de la distribución debidos a las otras cargas en la estructura.
- Encontrar la fuerza neta sobre la distribución, sumando la fuerza sobre cada elemento de carga.

Henri Poincaré (1854-1912)

LOS PASOS EN EL ARGUMENTO: I) LA DISTRIBUCION DE CARGA

Asumimos una distribución de carga extendida, que se mueve de manera rígida y sin rotar[3].

$$\rho\left(\mathbf{x}, t\right) = \rho\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}\left(t\right)\right) \tag{16}$$



[3]En una versión más sofisticada, podemos asumir que la distribución de carga conserva su forma *en el referencial en reposo de la distribución.*

Entonces

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t))}\rho_{\mathbf{k}} \\ &\approx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\left[1 - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}(t)\right]\rho_{\mathbf{k}} \\ &= \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t}\left[2\pi\delta(\omega) - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}(\omega)\right]\rho_{\mathbf{k}} \qquad (17)\end{aligned}$$

Con la misma aproximación

$$\begin{aligned}\mathbf{j} &= \dot{\mathbf{X}}\,\rho(\mathbf{x}-\mathbf{X}(t)) \\ &\approx \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t}(-i)\,\omega\mathbf{X}(\omega)\,\rho_{\mathbf{k}} \qquad (18)\end{aligned}$$

LOS PASOS EN EL ARGUMENTO: II) LOS POTENCIALES

Los potenciales están dados por

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi &= 4\pi\rho \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{aligned} \tag{19}$$

En el gauge de Lorenz

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \tag{20}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right]\phi_{\mathbf{k}}(\omega) &= 4\pi\left[2\pi\delta(\omega) - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}(\omega)\right]\rho_{\mathbf{k}} \\
\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right]\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\omega) &= -\frac{4\pi}{c} i\omega\mathbf{X}(\omega)\rho_{\mathbf{k}} \\
-i\frac{\omega}{c}\phi_{\mathbf{k}}(\omega) + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\omega) &= 0 \qquad (21)
\end{aligned}$$

Vamos a resolver estas ecuaciones con condiciones de contorno *causales*, es decir, reemplazando $\omega \to \omega + i\epsilon$ [4].

[4] Clase 11, desde la diapositiva 48 en adelante.

LOS PASOS EN EL ARGUMENTO: III) LOS CAMPOS

Como vamos a despreciar la fuerza magnética, sólo necesitamos el campo eléctrico

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{22}$$

Transformando Fourier

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\omega) &= -i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}}(\omega) + i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\omega) \\ &= (-4\pi)\frac{\left[-ic^2\mathbf{k}\left[2\pi\delta(\omega) - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}(\omega)\right] + \omega^2\mathbf{X}(\omega)\right]}{\left[(\omega+i\epsilon)^2 - c^2k^2\right]}\rho_{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{23}$$

LOS PASOS EN EL ARGUMENTO: IV) LA FUERZA

La fuerza sobre cada elemento de carga es

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \left(\rho(\mathbf{x}, t)\, d^3x\right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \tag{24}$$

donde $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ es el campo generado por *el resto* de la distribución; al considerar una distribución continua eliminamos el problema del autocampo. Si en cambio consideramos cargas discretas, $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ es el campo generado por *las otras* cargas. La fuerza total sobre la distribución de carga

$$\mathbf{F}(t) = \int d^3x\ \rho(\mathbf{x}, t)\, \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \tag{25}$$

Por supuesto, la integral da cero, por la tercera Ley de Newton.

No. La fuerza de Lorentz no obedece la tercer Ley de Newton. La suma total no da cero, la diferencia es el impulso transferido al campo electromagnético.

Transformando Fourier

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(\omega) &= \int \frac{d^3k\,d\omega'}{(2\pi)^4}\,\rho^*_{\mathbf{k}}(\omega')\,\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\omega-\omega') \approx \Lambda(\omega)\,\mathbf{X}(\omega) \\
\Lambda(\omega) &= \left(\frac{8\pi}{3}\right)\frac{\omega^2}{c^2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{|\rho_{\mathbf{k}}|^2}{\left[k^2-(\omega+i\epsilon)^2/c^2\right]} \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Para simplificar, asumimos que la distribución de carga tiene simetría esférica.

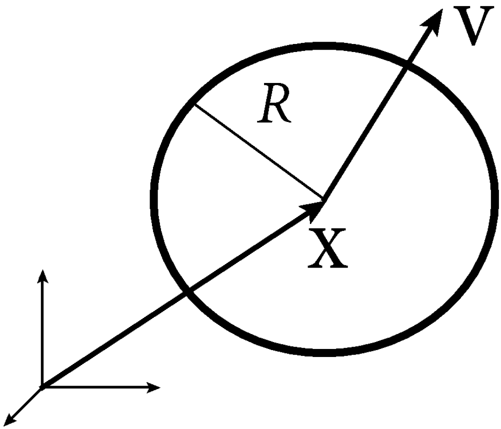
LOS PASOS EN EL ARGUMENTO: IV) LA ECUACION DE MOVIMIENTO

En este punto ya podemos escribir la ecuación de movimiento

$$\left[m_D\omega^2 + \Lambda\left(\omega\right)\right]\mathbf{X}\left(\omega\right) = 0 \tag{27}$$

donde m_D es la *masa desnuda*.

Para continuar, es conveniente elegir una forma concreta de la distribución de carga, que haga al problema accesible analíticamente. Una distribución sencilla es una cáscara esférica de radio R.



Entonces

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{e}{4\pi R^2}\delta(r-R)$$

$$\rho_{\mathbf{k}} = e\frac{\sin kR}{kR} \tag{28}$$

$$\Lambda(\omega) = \left(\frac{ie^2}{3cR^2}\right)\omega\left(1-e^{2i\omega R/c}\right) \tag{29}$$

Esta fórmula ha sido calculada asumiendo que ω es real. Sin embargo, vamos a suponer que sigue valiendo para ω complejo.

LAS MANOS EN LA MASA

La masa de la partícula se define por la condición de que, cuando $\omega \to 0$, la ecuación de movimiento es

$$m\omega^2 \mathbf{X}(\omega) = 0 \tag{30}$$

Por lo tanto

$$m_D = m - \lim_{\omega \to 0} \frac{\Lambda(\omega)}{\omega^2} = m - \frac{2e^2}{3c^2 R} \tag{31}$$

m es la *masa vestida*, que es la que efectivamente se mide.

La ecuación de movimiento es

$$m\omega^2 \left[1 + \vartheta \left[\frac{ic}{2R\omega}\left(1 - e^{2i\omega R/c}\right) - 1\right]\right] \mathbf{X}(\omega) = 0 \tag{32}$$

donde

$$\vartheta = \frac{2e^2}{3mc^2 R} = \frac{2}{3}\frac{r_{cl}}{R} \tag{33}$$

$r_{cl} = e^2/mc^2$ es el radio clásico de la partícula.

Las soluciones para la partícula libre son $\omega = 0$ u $\omega = (c/2R)\,(\xi + i\eta)$

$$0 = (1-\vartheta)\,(\xi + i\eta) + i\vartheta\left(1 - e^{i\xi-\eta}\right) \qquad (34)$$

Separando partes real e imaginaria

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\vartheta)\,\xi + e^{-\eta}\vartheta\sin\xi \\ 0 &= (1-\vartheta)\,\eta + \vartheta\left(1 - e^{-\eta}\cos\xi\right) \qquad (35) \end{aligned}$$

Se ve que sólo puede haber raíces con $\eta > 0$ si $\vartheta > 1$, o sea $R < 2r_{cl}/3$.

Por otro lado, si desarrollamos la ecuación de movimiento en potencias de $R\omega/c$, el primer orden no trivial es

$$m\left[\omega^2 + i\frac{R}{c}\vartheta\omega^3\right]\mathbf{X}(\omega) = 0 \tag{36}$$

que es independiente de R y reproduce el término de Abraham $-$ Lorentz. Todos los demás términos van a cero cuando $R \to 0$.

Como una partícula cuántica tiene un tamaño natural mucho mayor que el radio clásico, esto sugiere que una teoría cuántica sería automáticamente consistente.

REFERENCIAS

- Herbert Spohn, *Dynamics of charged particles and their radiation field* (Cambridge U.P., (2004)).
- Peter W. Milonni, *The quantum vacuum* (Academic Press (1994)).
- E. J. Moniz y D. H. Sharp, *Absence of runaways and divergent self-mass in nonrelativistic quantum electrodynamics*, Phys. Rev. D10, 1133 (1974).
- Adrián E. Rubio López y Oriol Romero-Isart, *Radiation Reaction of a Jiggling Dipole in a Quantum Electromagnetic Field*, Phys. Rev. Lett. 123, 243603 (2019).