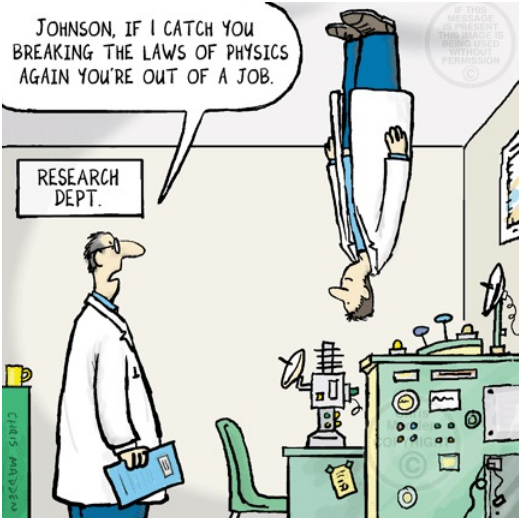
REACCION DE RADIACION



LA FUNCION DE GREEN DE LA ECUACION DE ONDAS

Como la ecuación de ondas es lineal, la solución de

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A = f \tag{1}$$

se puede escribir como

$$A\left[\mathbf{x}, t\right] = \int dt' \int d^3x' \; G\left[\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'\right] f\left[\mathbf{x}', t'\right] \tag{2}$$

donde G es la solución a

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right)\delta\left(t - t'\right) \tag{3}$$

- Si el espacio es homogéneo, $G = G\,[\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t']$.

- Por causalidad, $G = 0$ si $t \leq t'$.

- Como las perturbaciones se propagan con velocidad c, $G = 0$ si $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > c\,(t - t')$

La condición $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = c\,(t - t')$ define el cono (futuro) de la luz.

SOLUCION MEDIANTE TRANSFORMADA DE FOURIER EN **x** Y t

Empezamos con

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta\left(\mathbf{x}\right)\delta\left(t\right) \tag{4}$$

pero esta vez transformamos Fourier en **x** y t

$$G\left[\mathbf{x}, t\right] = \int \frac{d^3 k}{\left(2\pi\right)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\left(2\pi\right)}\, e^{i\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t\right]} G_{\mathbf{k},\omega} \tag{5}$$

El problema se reduce a una ecuación algebraica

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right] G_{\mathbf{k},\omega} = -1 \tag{6}$$

Si simplemente dividiéramos por $\omega^2/c^2 - k^2$, $G_{\mathbf{k},\omega}$ tendría singularidades sobre el eje real, en $\omega = \pm ck$.

Pero eso no puede ser, porque *si la función $f(t)$ se anula idénticamente para $t < 0$, entonces las singularidades de su transformada deben estar en el semiplano inferior*. Si

$$f(\omega) = \int_0^\infty dt\; e^{i\omega t} f(t) \tag{7}$$

entonces

$$f(\omega + i\sigma) = \int_0^\infty dt\; e^{i\omega t} e^{-\sigma t} f(t) \tag{8}$$

no puede ser divergente si $\sigma > 0$.

Consideremos la fórmula de Fourier

$$f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t} f[\omega] \tag{9}$$

como la integral de una función compleja $\mathbf{F}[\mathbf{z}] = e^{-i\mathbf{z}t} f[\mathbf{z}]$ sobre una curva Γ que coincide con el eje real.

La idea es "completar" la curva agregando un arco que nos permita convertirla en una curva cerrada y aplicar el teorema de los residuos, pero de tal manera que la integral sobre el arco suplementario se anule. Si $t < 0$, podemos lograrlo agregando un arco de radio infinito en el semiplano superior, porque allí $\mathbf{z} = \omega + i\sigma$ con $\sigma > 0$, y $e^{-i\mathbf{z}t} = e^{i\omega|t|} e^{-\sigma|t|}$ converge bellamente. Pero como queremos que $f(t)$ se anule para $t < 0$, nuestro contorno "mejorado" no debe atrapar ninguna singularidad de $\mathbf{F}[\mathbf{z}]$

Para lograr que $G_{\mathbf{k},\omega}$ no tenga singularidades en el semiplano superior, deformamos la ecuación (**??**) en

$$\left[\frac{(\omega + i\epsilon)^2}{c^2} - k^2\right] G_{\mathbf{k},\omega} = -1 \tag{10}$$

Entonces

$$G_{\mathbf{k},\omega} = \frac{-c^2}{\left[(\omega + i\epsilon)^2 - c^2 k^2\right]} \tag{11}$$

posee singularidades en $\omega = \pm ck - i\epsilon$, y

$$G[\mathbf{x}, t] = \left(-c^2\right) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t]}}{\left[(\omega + i\epsilon)^2 - c^2 k^2\right]} \tag{12}$$

Para $t > 0$, completamos el camino de integración con un arco en el semiplano inferior.

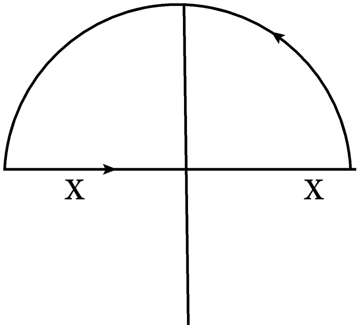


Figura: $t < 0$

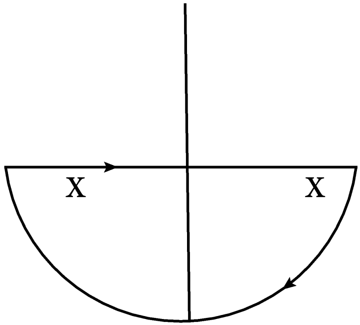


Figura: $t > 0$

Para calcular la integral, reescribimos la ec. (**??**) como ($\omega_k = ck$)

$$G[\mathbf{x}, t] = \left(-c^2\right) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(2\pi)} \; \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega_k} \left[\frac{1}{(\omega + i\epsilon - \omega_k)} - \frac{1}{(\omega + i\epsilon + \omega_k)}\right] \quad (13)$$

La integral en la segunda línea resulta

$$\frac{-i}{2\omega_k} \left[e^{-i\omega_k t} - e^{+i\omega t}\right] = -\frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k} \quad (14)$$

con lo cual la representación (**??**) se reduce a la ecuación

$$G[\mathbf{x}, t] = c^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k} \theta(t) \quad (15)$$

EL MODELO DE ABRAHAM-LORENTZ

Queremos ver si es posible deducir sistemáticamente la fórmula de Abraham-Lorentz

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} - \Gamma\frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3} + m\omega_0^2\mathbf{x} = e\mathbf{E} \tag{16}$$

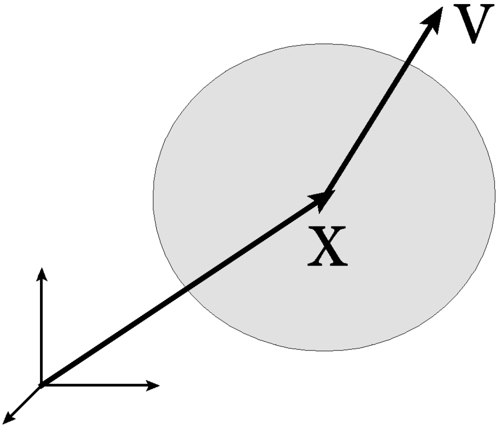
$\Gamma = 2e^2/3c^3$. La idea es

- Para una distribución de cargas razonablemente simple, encontrar los campos en cada punto de la distribución debidos a las otras cargas en la estructura.
- Encontrar la fuerza neta sobre la distribución, sumando la fuerza sobre cada elemento de carga.
- Recuperar el caso de una partícula como caso límite de una distribución finita

LOS PASOS EN EL ARGUMENTO: I) LA DISTRIBUCION DE CARGA

Asumimos una distribución de carga extendida, que se mueve de manera rígida y sin rotar[1].

$$\rho\left(\mathbf{x},t\right)=\rho\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}\left(t\right)\right) \tag{17}$$



[1] En una versión más sofisticada, podemos asumir que la distribución de carga conserva su forma *en el referencial en reposo de la distribución.*

Entonces

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbf{k}}(\omega) &= \left[2\pi\delta(\omega) - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}(\omega)\right]\rho_{\mathbf{k}} \\
\mathbf{j}_{\mathbf{k}}(\omega) &= (-i)\,\omega\mathbf{X}(\omega)\,\rho_{\mathbf{k}} \\
\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right]\phi_{\mathbf{k}}(\omega) &= 4\pi\left[2\pi\delta(\omega) - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}(\omega)\right]\rho_{\mathbf{k}} \\
\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right]\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\omega) &= -\frac{4\pi}{c}i\omega\mathbf{X}(\omega)\,\rho_{\mathbf{k}} \\
-i\frac{\omega}{c}\phi_{\mathbf{k}}(\omega) + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\omega) &= 0 \qquad (18)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\omega) = (-4\pi)\frac{\left[-ic^2\mathbf{k}\left[2\pi\delta(\omega) - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}(\omega)\right] + \omega^2\mathbf{X}(\omega)\right]}{\left[(\omega + i\epsilon)^2 - c^2k^2\right]}\rho_{\mathbf{k}} \qquad (19)$$

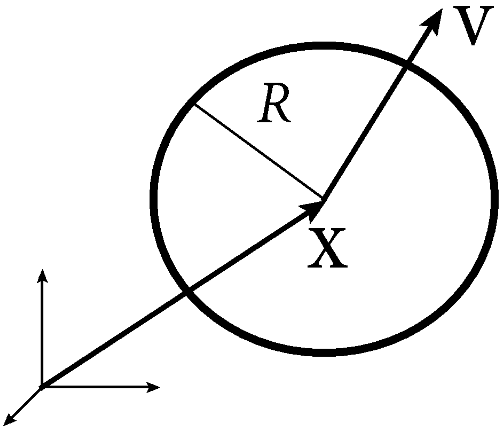
$$\mathbf{F}(\omega) = \Lambda(\omega)\,\mathbf{X}(\omega)$$

$$\Lambda(\omega) = \left(\frac{8\pi}{3}\right)\frac{\omega^2}{c^2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{|\rho_{\mathbf{k}}|^2}{\left[k^2-(\omega+i\epsilon)^2/c^2\right]} \tag{20}$$

$$\left[m_D\omega^2+\Lambda(\omega)\right]\mathbf{X}(\omega)=0 \tag{21}$$

donde m_D es la *masa desnuda*.

Para continuar, es conveniente elegir una forma concreta de la distribución de carga, que haga al problema accesible analíticamente. Una distribución sencilla es una cáscara esférica de radio R.



Entonces

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &= \frac{e}{4\pi R^2}\delta(r-R) \\ \rho_{\mathbf{k}} &= e\frac{\sin kR}{kR} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\Lambda(\omega) = \left(\frac{ie^2}{3cR^2}\right)\omega\left(1 - e^{2i\omega R/c}\right) \tag{23}$$

Esta fórmula ha sido calculada asumiendo que ω es real. Sin embargo, vamos a suponer que sigue valiendo para ω complejo.

LAS MANOS EN LA MASA

La masa de la partícula se define por la condición de que, cuando $\omega \to 0$, la ecuación de movimiento es

$$m\omega^2 \mathbf{X}(\omega) = 0 \tag{24}$$

Por lo tanto

$$m_D = m - \lim_{\omega \to 0} \frac{\Lambda(\omega)}{\omega^2} = m - \frac{2e^2}{3c^2 R} \tag{25}$$

m es la *masa vestida*, que es la que efectivamente se mide.

La ecuación de movimiento es

$$m\omega^2\left[1+\vartheta\left[\frac{ic}{2R\omega}\left(1-e^{2i\omega R/c}\right)-1\right]\right]\mathbf{X}(\omega)=0 \tag{26}$$

donde

$$\vartheta=\frac{2e^2}{3mc^2R}=\frac{2}{3}\frac{r_{cl}}{R} \tag{27}$$

$r_{cl}=e^2/mc^2$ es el radio clásico de la partícula.

Las soluciones para la partícula libre son $\omega = 0$ u $\omega = (c/2R)\,(\xi + i\eta)$

$$0 = (1-\vartheta)\,(\xi + i\eta) + i\vartheta\left(1 - e^{i\xi-\eta}\right) \tag{28}$$

Separando partes real e imaginaria

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\vartheta)\,\xi + e^{-\eta}\vartheta \sin\xi \\ 0 &= (1-\vartheta)\,\eta + \vartheta\left(1 - e^{-\eta}\cos\xi\right) \end{aligned} \tag{29}$$

Se ve que sólo puede haber raíces con $\eta > 0$ si $\vartheta > 1$, o sea $R < 2r_{cl}/3$[2].

---

[2] Para el caso general, ver L. Landau y E. Lifshitz, *Statistical Physics*, parte 1 (Vol. V del Curso de Física Teórica (Elsevier, Londres (1980)), sección 123.

RESCATANDO AL MODELO DE ABRAHAM-LORENTZ

Si desarrollamos la ecuación de movimiento en potencias de $R\omega/c$, el primer orden no trivial es

$$m\left[\omega^2 + i\frac{2e^2}{3mc^3}\omega^3\right]\mathbf{X}(\omega) = 0 \tag{30}$$

que es independiente de R y reproduce el término de Abraham $-$ Lorentz. Todos los demás términos van a cero cuando $R \to 0$. En ese límite, la ecuación de Abraham-Lorentz es *exacta*. Por lo tanto, vale la pena ver si hay alguna forma de darle sentido.

Una forma de entender al modelo de Abraham-Lorentz es reinterpretar que, en la fórmula

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} - \Gamma\frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3} + m\omega_0^2\mathbf{x} = 0 \tag{31}$$

$\Gamma = 2e^2/3c^3$, la derivada tercera debe ser entendida como la derivada de la aceleración calculada *sin* el término de Lorentz

$$\frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3} = \frac{d}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \approx -\omega_0^2\frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{32}$$

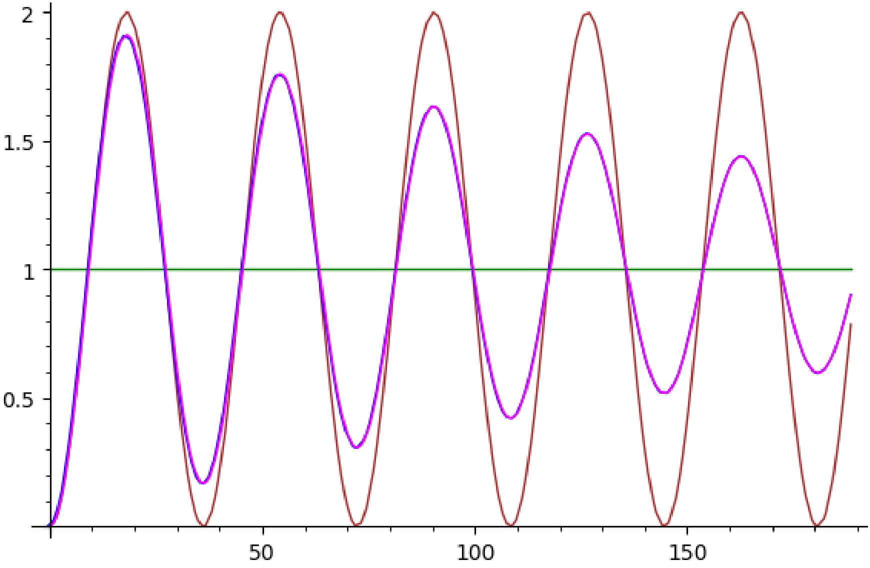
resultando en

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + \Gamma\omega_0^2\frac{d\mathbf{x}}{dt} + m\omega_0^2\mathbf{x} = 0 \tag{33}$$

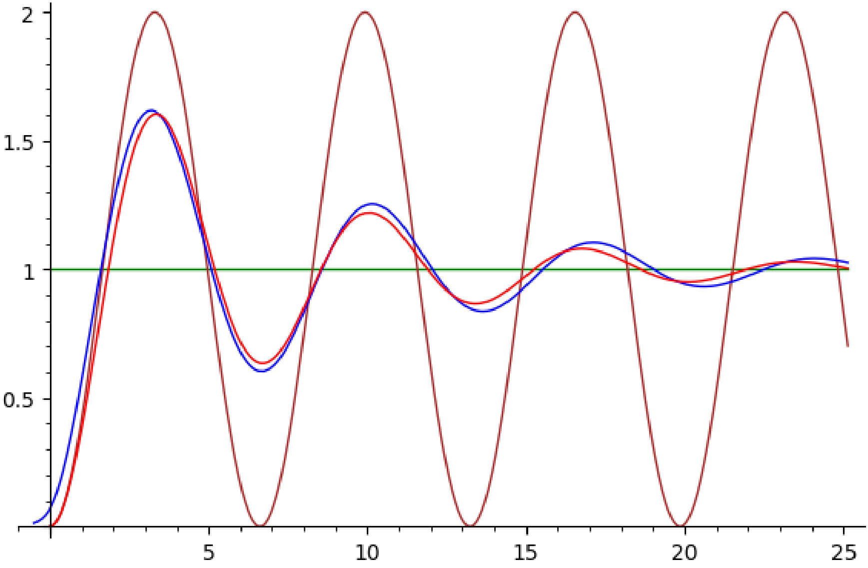
Para comparar las dos ecuaciones (**??**) y (**??**), reintroducimos el parámetro χ

$$\cosh 3\chi = 1 + \frac{27\Gamma^2\omega_0^2}{2m^2} \tag{34}$$

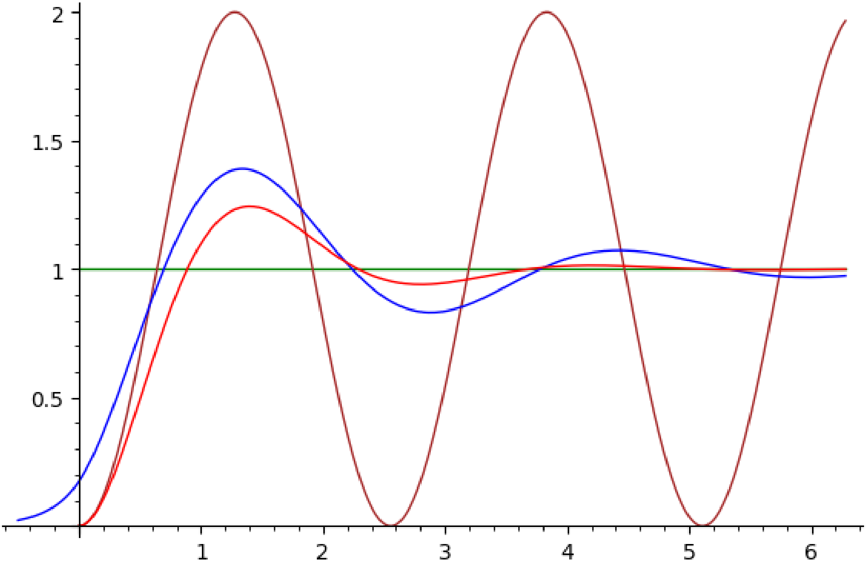
$3\Gamma/m = 1$, $\chi = 1/10$



$3\Gamma/m = 1$, $\chi = 1/2$



$3\Gamma/m = 1, \chi = 1$



BOHR AGAIN

En la clase 22 consideramos el colapso de la órbita del electrón en el modelo de Bohr, pero no tuvimos en cuenta la pérdida de momento angular.

La fuerza de Abraham-Lorentz sobre el electrón es

$$\mathbf{F} = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{d}{dt}\mathbf{a} \tag{35}$$

Calculamos la aceleración en ausencia de amortiguamiento por radiación

$$\mathbf{a} = -\frac{e^2}{mr^3}\mathbf{x} \tag{36}$$

Si la órbita permanece aproximadamente circular

$$\mathbf{F} = -\frac{2e^2}{3c^3}\frac{e^2}{mr^3}\mathbf{v} \tag{37}$$

Por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{x} \times \mathbf{F} = -\frac{2e^2}{3c^3}\frac{e^2}{m^2 r^3}\mathbf{L} \tag{38}$$

Para una órbita circular

$$\frac{e^2}{2r} = -E = \frac{L^2}{2mr^2} \tag{39}$$

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3}\frac{me^8}{L^5} \tag{40}$$

$$L^6 = L_0^6\left(1 - \frac{4e^2}{c^3}\frac{me^8}{L_0^6}t\right) \tag{41}$$

La cuenta equivalente para la energía es

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = -\frac{2e^2}{3c^3}\frac{e^2}{mr^3}v^2 \tag{42}$$

Para una órbita circular, obtenemos

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32e^2}{3c^3}\frac{1}{m^2e^4}E^4 \tag{43}$$

$$\frac{1}{E^3} = \frac{1}{E_0^3}\left(1 + \frac{4e^2}{c^3}\frac{8E_0^3 t}{m^2e^4}\right) \tag{44}$$

Observamos que $EL^2 = -me^4/2$ permanece constante.

REACCION DE RADIACION EN EL REGIMEN RELATIVISTA
La fuerza de Lorentz en el régimen relativista es

$$\frac{d}{d\tau}(mcu^{\mu}) = eF^{\mu}_{\nu}u^{\nu} \tag{45}$$

$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ [3]. Queremos agregar un término representando la reacción de radiación

$$\frac{d}{d\tau}(mcu^{\mu}) = eF^{\mu}_{\nu}u^{\nu} + \Gamma^{\mu} \tag{46}$$

con las condiciones que $u_{\mu}\Gamma^{\mu} = 0$ y que en el referencial en que la partícula está en reposo

$$\Gamma^{\mu} = \left(0, \frac{2e^2}{3c^3}\frac{d}{dt}\mathbf{a}\right) \tag{47}$$

[3] Ver clase 18

Recordemos que la tetraaceleración

$$a^{\mu} = c\frac{d}{d\tau}u^{\mu} \tag{48}$$

Efectivamente cumple que $u_{\mu}a^{\mu} = 0$. Entonces

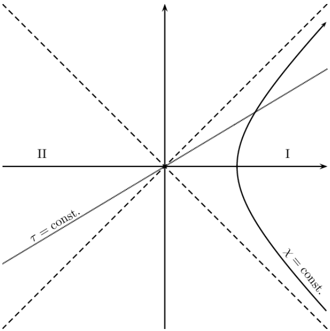
$$u_{\mu}\frac{d}{d\tau}a^{\mu} = \frac{-1}{c}a_{\mu}a^{\mu} \tag{49}$$

y por lo tanto la solución a nuestro problema es

$$\Gamma^{\mu} = \frac{2e^2}{3c^3}\left[\frac{d}{d\tau}a^{\mu} - \frac{1}{c}a_{\nu}a^{\nu}u^{\mu}\right] \tag{50}$$

Por ejemplo, consideremos una partícula uniformemente acelerada[4]

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{c}{\alpha}\sinh\frac{\alpha\tau}{c} \\
x &= \frac{c^2}{\alpha}\cosh\frac{\alpha\tau}{c} \\
y &= z = 0
\end{aligned}
\tag{51}
$$



[4] Ver clase 17

Entonces

$$
\begin{aligned}
u^0 &= \cosh \frac{\alpha\tau}{c} \\
u^1 &= \sinh \frac{\alpha\tau}{c}
\end{aligned} \tag{52}
$$

$$
\begin{aligned}
a^0 &= \alpha \sinh \frac{\alpha\tau}{c} \\
a^1 &= \alpha \cosh \frac{\alpha\tau}{c}
\end{aligned} \tag{53}
$$

$a_\nu a^\nu = \alpha^2$. Por lo tanto

$$
\frac{d}{d\tau} a^\mu = \frac{\alpha^2}{c} u^\mu \tag{54}
$$

y entonces $\Gamma^\mu = 0$!

REFERENCIAS

- Herbert Spohn, *Dynamics of charged particles and their radiation field* (Cambridge U.P., (2004)).
- Peter W. Milonni, *The quantum vacuum* (Academic Press (1994)).
- E. J. Moniz y D. H. Sharp, *Absence of runaways and divergent self-mass in nonrelativistic quantum electrodynamics*, Phys. Rev. D10, 1133 (1974).
- Adrián E. Rubio López y Oriol Romero-Isart, *Radiation Reaction of a Jiggling Dipole in a Quantum Electromagnetic Field*, Phys. Rev. Lett. 123, 243603 (2019).