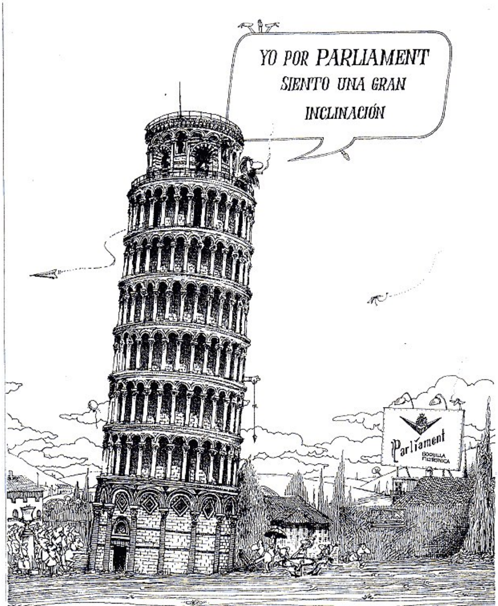
FORMULACION LAGRANGIANA EN TEORIA DE CAMPOS



La descripción básica de un sistema mecánico está dada por las ecuaciones de Newton. Un móvil descripto por una coordenada x y sometido a una fuerza F sufre una aceleración

$$m\ddot{x} = f \tag{1}$$

Si la fuerza deriva de un potencial

$$f = -\frac{dV}{dx} \tag{2}$$

y este no depende del tiempo, entonces la energía $E = K + V$ se conserva. K es la energía cinética

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3}$$

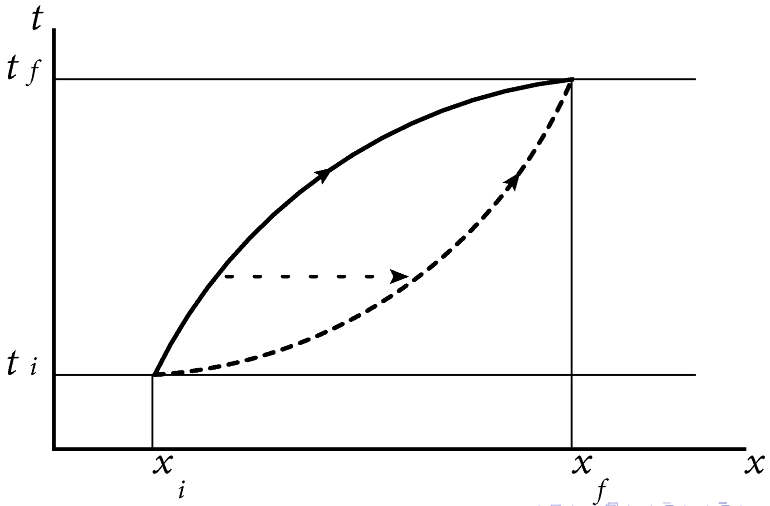
donde $v = \dot{x}$ es la velocidad, y V es la energía potencial.

Las ecuaciones de Newton pueden ser difíciles de integrar en la práctica, especialmente en sistemas con vínculos. Mucho más flexible es el formalismo de Lagrange, inspirado en el Principio de Fermat de la óptica. A semejanza del camino óptico, se define la *acción*

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\ L\left[v\left(t\right), x\left(t\right), t\right] \tag{4}$$

donde la función L es el *lagrangiano*.

La trayectoria que empieza en x_i en el instante $t_i = 0$ y arriba a x_f en el instante t_f es la que es un extremo de la acción, entre todas las trayectorias con los mismos comienzo y final. Eso quiere decir que $x(t)$ es arbitrario, excepto en t_i y t_f; dado $x(t)$, la velocidad queda definida como $v = dx/dt$.



La condición de extremo es la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

Para el sistema que estamos mirando $L = K - V$ (nótese que L *no* es la energía), y las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a las de Newton. La potencia del método lagrangiano es la posibilidad de introducir información sobre el sistema, por ejemplo la presencia de vínculos, directamente en el lagrangiano.

FORMULACION LAGRANGIANA DEL CAMPO DE KLEIN-GORDON

Vamos a considerar el caso más simple de una teoría de campos relativista, definida por un único campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ que se transforma como un escalar ante transformaciones de Lorentz. Buscamos un Lagrangiano de la forma

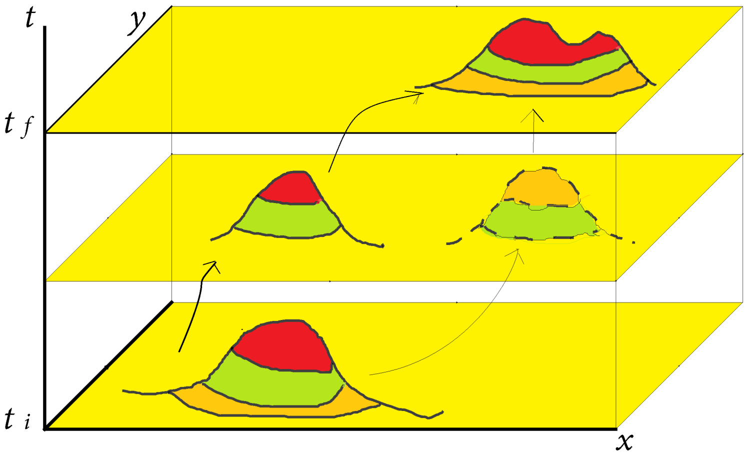
$$\mathcal{L} = \int d^3x \, L(\phi, \phi_{,\mu}, t) \tag{6}$$

donde L es la *densidad lagrangiana*. Vamos a pedir que L también sea un escalar. Esto garantiza que la acción

$$S = \int dt \, \mathcal{L} = \frac{1}{c} \int d^4x \, L \tag{7}$$

es un invariante Lorentz.

La *historia* que interpola entre una *configuración* inicial $\phi(\mathbf{x}, t_i)$ y la configuración final $\phi(\mathbf{x}, t_f)$ es la que es un extremo de la acción entre todas las historias con los mismos valores inicial y final.



La variación de la acción da

$$\delta S = \frac{1}{c}\int d^4x \left\{ \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}}\delta\phi_{,\mu} + \frac{\partial L}{\partial \phi}\delta\phi \right\} \tag{8}$$

usando que $\delta\phi_{,\mu} = (\delta\phi)_{,\mu}$, podemos integrar por partes el primer término, y obtenemos

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int d^4x \left\{ \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} \right\}\delta\phi \tag{9}$$

De este modo, la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \tag{10}$$

Pedimos que L sea cuadrático en la derivada temporal de ϕ, de manera que la ecuación de Euler-Lagrange sea de segundo orden en el tiempo. Por lo tanto, L debe tener la estructura

$$L = \frac{-1}{2} M(\phi)\, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \tag{11}$$

$$-\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 \tag{12}$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} &= -M(\phi)\, \partial^\mu \phi \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \frac{-1}{2} M'(\phi)\, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V'(\phi) \\ \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} &= -M(\phi)\, \partial_\mu \partial^\mu \phi - M'(\phi)\, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \end{aligned} \tag{13}$$

Y la ecuación de ondas toma la forma

$$-M(\phi)\, \partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} M'(\phi)\, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V'(\phi) = 0 \tag{14}$$

En particular, obtenemos la teoría de Klein-Gordon si pedimos $M(\phi) \equiv 1$ y $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\phi} - \Delta\phi + m^2\phi = 0 \tag{15}$$

ϕ tiene unidades de $\sqrt{\hbar/LT}$ y m de L^{-1}. Para una onda plana $\phi \propto e^{i[\mathbf{kx}-\omega t]}$ encontramos la relación de dispersión

$$\omega = c\sqrt{k^2 + m^2} \tag{16}$$

Identificando $\hbar\omega$ con la energía y $\hbar k$ con el impulso, obtenemos

$$\frac{E}{c} = \sqrt{p^2 + \hbar^2 m^2} \tag{17}$$

de manera que la teoría describe una partícula cuya masa en reposo es $\hbar m/c$. m^{-1} es la longitud de onda Compton de la partícula.

FORMULACION LAGRANGIANA DEL ELECTROMAGNETISMO

Queremos construir un lagrangiano a partir del tensor de Maxwell $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$[1]

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

de tal manera que las ecuaciones de Euler-Lagrange sean las ecuaciones de Maxwell. Como éstas son lineales, el Lagrangiano debería ser cuadrático.

[1] Ver clase 18.

A partir de $F_{\mu\nu}$ es posible construír dos invariantes $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ y $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$, pero el segundo es una divergencia total

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} &= 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}\right)A_{\sigma,\rho} \\ &= 2\partial_\rho\left[\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}\right)A_\sigma\right] \end{aligned} \tag{19}$$

y por lo tanto no afectaría las ecuaciones de movimiento clásicas.

Por lo tanto la única opción es un lagrangiano de la forma $L = \mathrm{constante}\ F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. En el sistema de Gauss la carga eléctrica tiene unidades $\left[e^2\right] = [\hbar c]$ y los campos tienen unidades de eL^{-2}. Entonces la acción tiene unidades de $[S] = [\hbar] = \left[\mathrm{constante}\,TL^{-1}\ e^2\right]$, y la constante debe ser adimensional, de modo que finalmente

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{-1}{4\,(4\pi)} F^{\sigma\rho}F_{\sigma\rho} = \frac{-1}{2\,(4\pi)} F^{\sigma\rho}A_{\rho,\sigma} \\
&= \frac{-1}{2\,(4\pi)} \left[\eta^{\lambda\rho}\eta^{\tau\sigma} - \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\tau\rho}\right] A_{\rho,\sigma}A_{\lambda,\tau} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Para variar la acción tomamos como variable los potenciales. Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\left(A_{\nu,\mu}\right)} &= \frac{-1}{2\left(4\pi\right)}\left\{\left[\eta^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma}-\eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}\right]A_{\rho,\sigma}\right. \\
&+ \left.\left[\eta^{\lambda\nu}\eta^{\tau\mu}-\eta^{\lambda\mu}\eta^{\tau\nu}\right]A_{\lambda,\tau}\right\} \\
&= -\frac{1}{(4\pi)}F^{\mu\nu} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange efectivamente son las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético libre

$$
\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial\left(A_{\nu,\mu}\right)} = \frac{1}{(4\pi)}F^{\nu\mu}_{,\mu} = 0 \qquad (22)
$$

Para acoplar los campos a una corriente agregamos un término

$$\frac{1}{c} A_\mu j^\mu \tag{23}$$

(que es dimensionalmente correcto), obteniendo las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas

$$F^{\nu\mu}_{,\mu} - \frac{4\pi}{c} j^\nu = 0 \tag{24}$$

Las homogéneas

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho,\sigma} = 0 \tag{25}$$

se cumplen automáticamente por haber escrito los campos en términos de potenciales.

Es interesante desglosar el lagrangiano

$$
\begin{aligned}
L = \frac{-1}{4\,(4\pi)} F^{\sigma\rho} F_{\sigma\rho} &= \frac{1}{2\,(4\pi)} F_{j0} F_{j0} - \frac{1}{4} F_{jk} F_{jk} \\
&= \frac{1}{2\,(4\pi)} \left[E^2 - B^2 \right] \qquad (26)
\end{aligned}
$$

En términos de los potenciales

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2\,(4\pi)} \left[\left(\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} + \nabla \phi \right)^2 - (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] \\
&= \frac{1}{2\,(4\pi)} \left[\frac{1}{c^2} \left(\dot{A}_j \right)^2 - (\nabla A_j)^2 + (\nabla \cdot \mathbf{A})^2 + \frac{2}{c} \nabla \phi \cdot \dot{\mathbf{A}} + (\nabla \phi)^2 \right] \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Vemos que el lagrangiano no depende de $\dot{\phi}$ y por eso la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente no es una ecuación de movimiento sino un vínculo

$$\partial_j \frac{\partial L}{\partial \phi_{,j}} = \frac{1}{(4\pi)} \nabla \cdot \left[\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} + \nabla \phi \right] = 0 \tag{28}$$

que por supuesto es la Ley de Gauss.

LEYES DE CONSERVACION EN TEORIA RELATIVISTA DE CAMPOS

En la teoría no relativista, la densidad de energía u y la densidad de impulso P^i obedecen leyes de conservación independientes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + J^j_{,j} &= 0 \\ \frac{\partial P^i}{\partial t} + T^{ij}_{,j} &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

u tiene unidades de $EL^{-3} = ML^{-1}T^{-2}$;
P^i tiene unidades de $\left(MLT^{-1}\right) L^{-3} = ML^{-2}T^{-1}$.
J^j tiene unidades de $EL^{-2}T^{-1} = MT^{-3}$
y T^{ij} tiene las mismas unidades que u, es decir $\left(MLT^{-1}\right) L^{-2}T^{-1} = ML^{-1}T^{-2}$.
Por otro lado, T^{ij} tiene unidades de fuerza por unidad de área, $\left(MLT^{-2}\right) L^{-}2 = ML^{-1}T^{-2}$, es decir, de presión.

En la teoría relativista, los cuatro objetos u, J^j, P^i y T^{ij} se combinan en un único tensor, el tensor de energía-impulso

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & J^j/c \\ cP^i & T^{ij} \end{pmatrix} \tag{30}$$

que satisface una única ecuación de conservación

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \tag{31}$$

Todas las componentes de $T^{\mu\nu}$ tienen las mismas unidades.

Para deducir la forma del tensor de energía-impulso adecuado a una teoría dada, pedimos que la acción sea invariante frente a un cambio arbitrario de coordenadas (no necesariamente una transformación de Lorentz)

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \tag{32}$$

a primer orden en ξ^{μ}.

Por ejemplo, para un campo escalar, la acción es

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \, L; \quad L = \frac{-1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V[\phi] \tag{33}$$

Asumimos que ϕ se transforma como un escalar $\phi'(x') = \phi(x)$. Por lo tanto $V[\phi]$ también es un escalar. Sin embargo

$$\begin{aligned} d^4x &= d^4x' \det \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \\ &= d^4x' \det \left[\delta^\rho_\sigma - \xi^\rho_{,\sigma} \right] \\ &= d^4x' \left[1 - \xi^\rho_{,\rho} \right] \quad ^\dagger \end{aligned} \tag{34}$$

$\dagger$ En el último paso, usar que $\log \det A = \mathrm{tr} \log A$, $\log[\mathbf{1} + a] \approx a$

Y tambien

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi &= \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \phi_{,\rho'} \\ &= \left[\delta^\rho_\mu + \xi^\rho_{,\mu}\right] \phi_{,\rho'} \\ &= \phi_{,\mu'} + \xi^\rho_{,\mu} \phi_{,\rho'} \end{aligned} \tag{35}$$

Entonces

$$\begin{aligned} S &= S' + \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ -\xi^\rho_{,\rho} L - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left[\xi^\rho_{,\mu} \phi_{,\rho} \phi_{,\nu} + \phi_{,\mu} \xi^\rho_{,\nu} \phi_{,\rho} \right] \right\} \\ &= S' - \frac{1}{c} \int d^4x \, \xi_{\rho,\sigma} T^{\rho\sigma} \end{aligned} \tag{36}$$

donde

$$T^{\rho\sigma} = \phi^{,\rho} \phi^{,\sigma} + \eta^{\rho\sigma} L \tag{37}$$

Integrando por partes vemos que la invarianza de la acción exige que el tensor $T^{\rho\sigma}$ sea conservado, y además las componentes de $T^{\rho\sigma}$ tienen unidades de densidad de energía (las mismas que L). Por lo tanto es natural identificarlo con el tensor de energía-impulso. Explícitamente

$$\begin{aligned}
T^{00} &= u = \frac{1}{c^2}\dot{\phi}^2 - \left[\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V[\phi]\right] \\
&= \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V[\phi] \\
T^{0j} &= \frac{1}{c}J^j = \frac{-1}{c}\dot{\phi}\,\phi_{,j} \\
T^{i0} &= cP^i = \frac{-1}{c}\dot{\phi}\,\phi_{,i} \\
T^{ij} &= \phi_{,i}\phi_{,j} + \delta_{ij}\left[\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V[\phi]\right]
\end{aligned} \tag{38}$$

El tensor de energía-impulso es simétrico.

Por la simetría de $T^{\mu\nu}$, el tensor

$$M^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^{\rho} - T^{\mu\rho} x^{\nu} \tag{39}$$

es conservado

$$M^{\mu\nu\rho}_{,\mu} = T^{\mu\nu}_{,\mu} x^{\rho} - T^{\mu\rho}_{,\mu} x^{\nu} + T^{\mu\nu}\delta^{\rho}_{\mu} - T^{\mu\rho}\delta^{\nu}_{\mu} = 0 \tag{40}$$

El tensor $L^{\nu\rho} = -u_{\mu} M^{\mu\nu\rho}$ se asocia con la densidad de momento angular

$$L^{\nu\rho} \approx P^{\nu} x^{\rho} - P^{\rho} x^{\nu} \tag{41}$$

Efectivamente

$$
\begin{aligned}
T^{00}_{,0} + T^{0j}_{,j} &= \frac{1}{c}\left[\dot{u} + \nabla \cdot \mathbf{J}\right] \\
&= \frac{1}{c}\left[\frac{1}{c^2}\dot{\phi}\ddot{\phi} + \nabla\phi \cdot \nabla\dot{\phi} + V'[\phi]\,\dot{\phi}\right] \\
&- \frac{1}{c}\left[\nabla\phi \cdot \nabla\dot{\phi} + \dot{\phi}\Delta\phi\right] \\
&= \frac{1}{c}\dot{\phi}\left[\frac{1}{c^2}\ddot{\phi} - \Delta\phi + V'[\phi]\right] = 0 \qquad (42)
\end{aligned}
$$

en virtud de la ecuación de Klein-Gordon (15).

$$
\begin{aligned}
T^{i0}_{,0} + T^{ij}_{,j} &= \dot{P}^{i} + T^{ij}_{,j} \\
&= \frac{-1}{c^2}\ddot{\phi}\,\phi_{,i} - \frac{1}{c^2}\dot{\phi}\,\dot{\phi}_{,i} + \nabla\phi\cdot\nabla\phi_{,i} + \phi_{,i}\Delta\phi \\
&+ \left[\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - V\left[\phi\right]\right]_{,i} \\
&= \phi_{,i}\left[\frac{1}{c^2}\ddot{\phi} - \Delta\phi + V'\left[\phi\right]\right] = 0 \qquad (43)
\end{aligned}
$$

Por la misma razón.

La próxima (y última) clase vamos a ver el tensor de energía impulso y la formulación Hamiltoniana de la teoría de Maxwell.

TENSOR DE ENERGIA IMPULSO Y FORMULACION HAMILTONIANA EN TEORIA DE CAMPOS

LEYES DE CONSERVACION EN TEORIA RELATIVISTA DE CAMPOS

En la teoría no relativista, la densidad de energía u y la densidad de impulso P^i obedecen leyes de conservación independientes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + J^j_{,j} &= 0 \\ \frac{\partial P^i}{\partial t} + T^{ij}_{,j} &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

En la teoría relativista, los cuatro objetos u, J^j, P^i y T^{ij} se combinan en un único tensor, el tensor de energía-impulso

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & J^j/c \\ cP^i & T^{ij} \end{pmatrix} \tag{45}$$

que satisface una única ecuación de conservación

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \tag{46}$$

Todas las componentes de $T^{\mu\nu}$ tienen las mismas unidades.

EL TENSOR DE ENERGIA IMPULSO EN LA TEORIA DE MAXWELL

Para deducir la forma del tensor de energía-impulso adecuado a una teoría dada, pedimos que la acción sea invariante frente a un cambio arbitrario de coordenadas (no necesariamente una transformación de Lorentz)

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \tag{47}$$

a primer orden en ξ^{μ}. Para identificar el tensor de energía-impulso adecuado a la teoría de Maxwell, observamos que

$$A_{\nu}\left(x\right) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\nu}} A'_{\rho}\left(x'\right) \tag{48}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\sigma}\left[\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu}A'_\rho\right] \\
&= \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu}A'_{\rho,\sigma} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\sigma}\left[\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu}\right]A'_\rho \\
&= \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu}A'_{\rho,\sigma} + \frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\nu \partial x^\mu}A'_\rho
\end{aligned} \tag{49}$$

El término adicional es simétrico en $(\mu\nu)$ y por eso no contribuye al tensor de Maxwell

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu}F'_{\sigma\rho} \\
&= F'_{\sigma\rho} + \xi^\sigma_{,\mu}F_{\sigma\nu} + \xi^\rho_{,\nu}F_{\mu\rho}
\end{aligned} \tag{50}$$

La acción en la teoría de Maxwell es

$$S = \frac{1}{c}\int d^4x\ L; \quad L = \frac{-1}{4\,(4\pi)}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho} \tag{51}$$

por lo tanto, ante un cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} S &= S' + \frac{1}{c}\int d^4x \left\{ -\xi^{\rho}_{,\rho}L - \frac{1}{2\,(4\pi)}F^{\mu\nu}\left[\xi^{\sigma}_{,\mu}F_{\sigma\nu} + \xi^{\rho}_{,\nu}F_{\mu\rho}\right]\right\} \\ &= S' - \frac{1}{c}\int d^4x\ \xi_{\rho,\sigma}T^{\rho\sigma} \end{aligned} \tag{52}$$

donde ahora

$$T^{\rho\sigma} = \frac{1}{(4\pi)}\left[F^{\rho}{}_{\mu}F^{\sigma\mu} - \frac{1}{4}\eta^{\rho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] \tag{53}$$

$T^{\rho\sigma}$ es simétrico, sin traza, y se conserva como consecuencia de las ecuaciones de Maxwell.

$$\begin{aligned}
T^{\rho\sigma}_{,\sigma} &= \frac{1}{(4\pi)}\left[F^{\rho}{}_{\mu,\sigma}F^{\sigma\mu} + F^{\rho}{}_{\mu}F^{\sigma\mu}_{,\sigma} - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu,\sigma}\right] \\
&= \frac{1}{(4\pi)}\eta^{\rho\sigma}\left[F_{\sigma\mu,\nu}F^{\nu\mu} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu,\sigma}\right] \\
&= \frac{1}{2\,(4\pi)}\eta^{\rho\sigma}\left[\left(F_{\sigma\mu,\nu} - F_{\sigma\nu,\mu}\right)F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu}F_{\mu\nu,\sigma}\right] \\
&= \frac{1}{2\,(4\pi)}\eta^{\rho\sigma}F^{\nu\mu}\left[F_{\sigma\mu,\nu} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\mu\nu,\sigma}\right] \qquad (54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\sigma\mu,\nu} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\mu\nu,\sigma} &= A_{\mu,\sigma\nu} - A_{\sigma,\mu\nu} \\
&+ A_{\sigma,\nu\mu} - A_{\nu,\sigma\mu} \\
&+ A_{\nu,\mu\sigma} - A_{\mu,\nu\sigma} \qquad (55)
\end{aligned}$$

Ahora podemos identificar

$$
\begin{aligned}
T^{00} &= u = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right) \\
T^{0j} &= \frac{1}{c}J^j = \frac{1}{(4\pi)}F^{0i}F^{ji} = \frac{1}{(4\pi)}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)^j \\
T^{i0} &= cP^i = \frac{1}{(4\pi)}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)^i \\
T^{ij} &= \frac{1}{(4\pi)}\left[F^{ik}F^{jk} - F^{i0}F^{j0} + \frac{1}{2}\delta^{ij}\left(E^2+B^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{(4\pi)}\left[-B^iB^j - E^iE^j + \frac{1}{2}\delta^{ij}\left(E^2+B^2\right)\right] \qquad (56)
\end{aligned}
$$

que reproducen las fórmulas de la clase 10[2].

[2] Hay un error de signo en las ecuaciones 40 y 43 de dicha clase.

FORMULACION HAMILTONIANA

Para pasar de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana, definimos el impulso p como

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} \tag{57}$$

y el *hamiltoniano* H como la transformada de Legendre del lagrangiano respecto de la velocidad

$$H[p, x, t] = pv[p, x, t] - L[v[p, x, t], x, t] \tag{58}$$

donde $v[p, x, t]$ es la solución de la ecuación

$$\left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_{v=v[p,x,t]} = p \tag{59}$$

Combinando las ecuaciones de Lagrange y las propiedades de la transformación de Legendre obtenemos las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{60}$$

D)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= v + p\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial p} \\ &= v + p\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial L}{\partial v} \\ &= v \end{aligned} \tag{61}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{62}$$

D)

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= p\frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial v} + \frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial L}{\partial x} \end{aligned} \tag{63}$$

Si $L = K - V$, $K = mv^2/2$, entonces $p = mv$ y

$$H = \frac{p^2}{2m} + V \tag{64}$$

(es esencial que H es expresado como función de p y no de v) y nuevamente recuperamos las ecuaciones de Newton.

FORMULACION HAMILTONIANA DEL CAMPO DE KLEIN-GORDON

Habíamos visto que el Lagrangiano del campo de Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = \int d^3x \, L = \int d^3x \, \left\{ \frac{-1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{\mu} - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right\} \qquad (65)$$

Por lo tanto el momento conjugado al campo ϕ es

$$p = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{c^2} \dot{\phi} \qquad (66)$$

Por lo tanto el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \int d^3x \; H \tag{67}$$

$$\begin{aligned} H &= p\dot{\phi} - L \\ &= \frac{1}{2}\left[c^2p^2 + (\nabla\phi)^2\right] + V[\phi] \end{aligned} \tag{68}$$

Las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= c^2 p \\ \dot{p} &= \Delta\phi - V'[\phi] \end{aligned} \tag{69}$$

reproducen la ecuación de Klein-Gordon (15).

FORMULACION HAMILTONIANA DE LA TEORIA DE MAXWELL

Cuando tratamos de aplicar este esquema en la teoría de Maxwell, nos encontramos inmediatamente con una dificultad. Nosotros adoptamos una formulación en que las *coordenadas generalizadas* son las componentes $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ de los potenciales. Por lo tanto las "velocidades" son las derivadas $\dot{A}^\mu = \left(\dot{\phi}, \dot{\mathbf{A}}\right)$. Pero como el lagrangiano de la teoría de Maxwell no depende de $\dot{\phi}$, la relación de velocidades a impulsos no es invertible.

Concretamente, usando el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2\,(4\pi)}\left[\left(\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} + \nabla\phi\right)^2 - (\nabla \times \mathbf{A})^2\right] \tag{70}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 \\ \mathbf{p} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{A}}} = \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} + \nabla\phi\right) \\ &= \frac{-1}{4\pi c}\mathbf{E} \end{aligned} \tag{71}$$

Por lo tanto, la teoría posee un *vínculo primario* $p_0 = 0$. Para que las soluciones de las ecuaciones de Hamilton sean necesariamente compatibles con el vínculo, agregamos al Hamiltoniano usual un término Np_0, donde N juega el papel de un multiplicador de Lagrange. El hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{A}} - L + Np_0 \\ &= \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right) + \frac{1}{4\pi}\nabla\phi\cdot\mathbf{E} + Np_0 \end{aligned} \tag{72}$$

y las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= N \\ \dot{\mathbf{A}} &= (-c)\left(\mathbf{E} + \nabla\phi\right) \\ \dot{p}_0 &= \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\mathbf{E} \\ \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} &= \nabla\times\mathbf{B} \end{aligned} \tag{73}$$

Podemos hacer varias observaciones:

- Compatibilidad con el *vínculo primario* $p_0 = 0$ nos obliga a imponer el *vínculo secundario* $\dot{p}_0 = 0$. Comparando con las ecuaciones de Hamilton, vemos que éste no es otra cosa que la Ley de Gauss. No es necesario agregar más vínculos, ya que por la Ley de Ampére-Maxwell, $\nabla \dot{\mathbf{E}} = 0$.

- Hay una ambigüedad inherente en la dinámica del sistema, ya que las ecuaciones de Hamilton no determinan $\dot{\phi}$. Por lo tanto, hay varias “historias” en términos de potenciales que describen una misma historia en términos de los campos.

Consideremos dos historias (1) y (2), partiendo de los mismos datos iniciales, en los que se ha variado la elección del multiplicador de Lagrange, es decir, $N^{(1)} = N^{(2)} + \delta N$. Entonces, tomando el diferencial entre ambas historias, tenemos[3]

$$\begin{aligned} \delta\dot{\phi} &= \delta N \\ \delta\dot{\mathbf{A}} &= (-c)\left(\delta\mathbf{E} + \nabla\delta\phi\right) \\ \delta\dot{p}_0 &= \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\delta\mathbf{E} = 0 \\ \frac{1}{c}\delta\dot{\mathbf{E}} &= \nabla\times\delta\mathbf{B} \end{aligned} \tag{74}$$

donde asumimos que ambas historias satisfacen los vínculos.

[3] P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, (Yeshiva University, New York (1964)).

Este sistema admite una solución particular

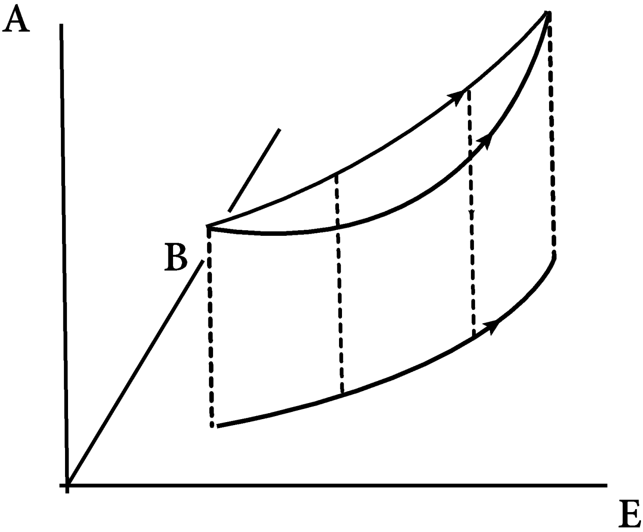
$$\begin{aligned}\delta\mathbf{A} &= -c\nabla\delta\mathcal{N} \\ \delta\phi &= \frac{\partial}{\delta t}\delta\mathcal{N}\end{aligned} \tag{75}$$

donde

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\mathcal{N}(\mathbf{x},t) = \delta N(\mathbf{x},t) \tag{76}$$

$\delta\mathcal{N}(\mathbf{x},0) = \delta\dot{\mathcal{N}}(\mathbf{x},0) = 0$. La solución homogénea se anula por tener datos iniciales triviales.

Por lo tanto, las distintas historias permitidas por las ecuaciones de Hamilton difieren unas de otras precisamente en transformaciones de gauge.



En conclusión

- En la formulación Hamiltoniana de una teoría con vínculos, éstos se incorporan al Hamiltoniano mediante multiplicadores de Lagrange, que no quedan determinados por las ecuaciones de Hamilton. Por lo tanto una misma historia del sistema admite varias descripciones posibles, que difieren entre sí por la elección de los multiplicadores. La traducción de una descripción en otra constituye una transformación de gauge.

- Viceversa, en una teoría de gauge, las ecuaciones de Hamilton no determinan unívocamente las velocidades. La transformación de velocidades en momentos admite soluciones homogéneas. Por eso mismo, los momentos no pueden elegirse arbitrariamente, sino que deben pertenecer a la imagen de la transformación. Esa condición aparece como otros tantos vínculos sobre la teoría.

En una teoría no singular

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\dot{q}^i M_{ij}\dot{q}^j - V\left[q^i\right] \\ p_i &= M_{ij}\dot{q}^j \\ H &= \frac{1}{2}p_i\left(M^{-1}\right)^{ij}p_j + V\left[q^i\right] \\ \dot{q}^i &= \left(M^{-1}\right)^{ij}p_j \end{aligned} \qquad (77)$$

Si la teoría admite una invarianza de gauge

$$\delta q^i = K^i_\alpha \epsilon^\alpha \tag{78}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\delta S &= 0 = \int dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} K^i_\alpha \dot{\epsilon}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^i} K^i_\alpha \epsilon^\alpha \right\} \\
&= \int dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} K^i_\alpha \dot{\epsilon}^\alpha + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) K^i_\alpha \epsilon^\alpha \right\} \\
&= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} K^i_\alpha \epsilon^\alpha (t_f) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} K^i_\alpha \epsilon^\alpha (t_i)
\end{aligned} \tag{79}$$

y por lo tanto aparece un vínculo

$$p_\alpha = p_i K^i_\alpha \equiv 0 \tag{80}$$

En una teoría singular

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\left(\dot{q}^i + K^i_\alpha q^\alpha\right) M_{ij} \left(\dot{q}^j + K^j_\beta q^\beta\right) \\
p_i &= M_{ij}\left(\dot{q}^j + K^j_\beta q^\beta\right); \quad p_\alpha = 0 \\
H &= \frac{1}{2} p_i \left(M^{-1}\right)^{ij} p_j - p_i K^i_\alpha q^\alpha + \mathbf{N}^\alpha p_\alpha \\
\dot{q}^i &= \left(M^{-1}\right)^{ij} p_j - K^i_\alpha q^\alpha; \;\; \dot{q}^\alpha = N^\alpha \\
\dot{p}_\alpha &= K^i_\alpha p_i = 0; \qquad \dot{\mathbf{N}}^\alpha = ?
\end{aligned}
\tag{81}
$$

y aparece una invarianza de gauge

$$
\delta q^i = -K^i_\alpha \epsilon^\alpha; \;\; \delta q^\alpha = \dot{\epsilon}^\alpha; \;\; \delta p_i = 0 \tag{82}
$$

COMENTARIOS FINALES

La teoría de Maxwell ocupa un lugar de preeminencia en la física por su abrumadora ubicuidad en términos de aplicaciones y porque ha sido el modelo tanto para la teoría de la gravitación como para las teorías de física de partículas en el siglo XX.

A pesar de más de un siglo y medio de trabajo minucioso, y aún restringiéndonos al electromagnetismo clásico, todavía hay áreas que son objeto de controversia, como las leyes de conservación para un campo en un medio material o el comportamiento de partículas relativistas aceleradas.

Sin embargo, hay una conclusión que podemos avanzar sin temor a equivocarnos.

QUINO TIENE RAZON