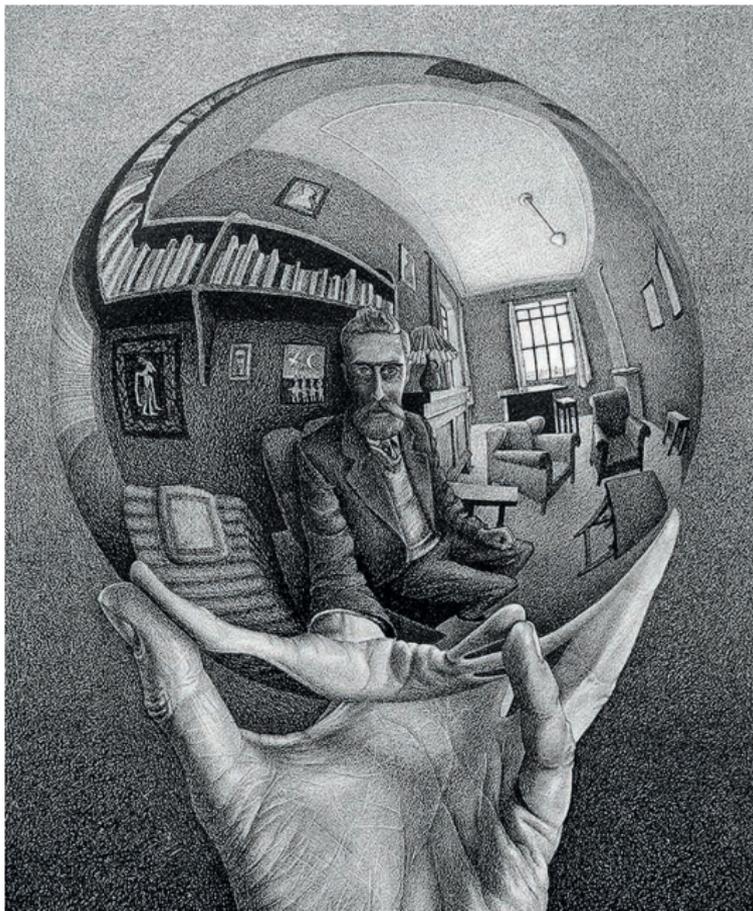


METODO DE IMAGENES Y DESARROLLOS ORTOGONALES



La vez pasada vimos que si uno puede resolver el problema

$$\Delta G_0 [\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = -4\pi\delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1)$$

con \mathbf{x} y \mathbf{x}' pertenecientes a un dominio V , con condicin de contorno $G_0 [\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = 0$ cuando $\mathbf{x} \in \delta V$, entonces podemos resolver cualquier problema que involucre la ecuación de Poisson con condiciones de contorno de Dirichlet. Decimos que G_0 es la *función de Green* del problema.

Físicamente esto corresponde a hallar el potencial de una carga en el interior de un conductor puesto a tierra, es decir, en una cavidad espejada.

El *método de imágenes* explota el hecho de que este problema tiene solución única. Si yo empiezo usando como función de Green un potencial coulombiano

$$G[\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2)$$

entonces resuelvo correctamente la ecuación pero podría no satisfacer las condiciones de contorno. Para obtener G_0 , debo sumar a G una solución G_h de la ecuación homogénea (es decir, de la ecuación de Laplace) en V , cuya condición de borde es

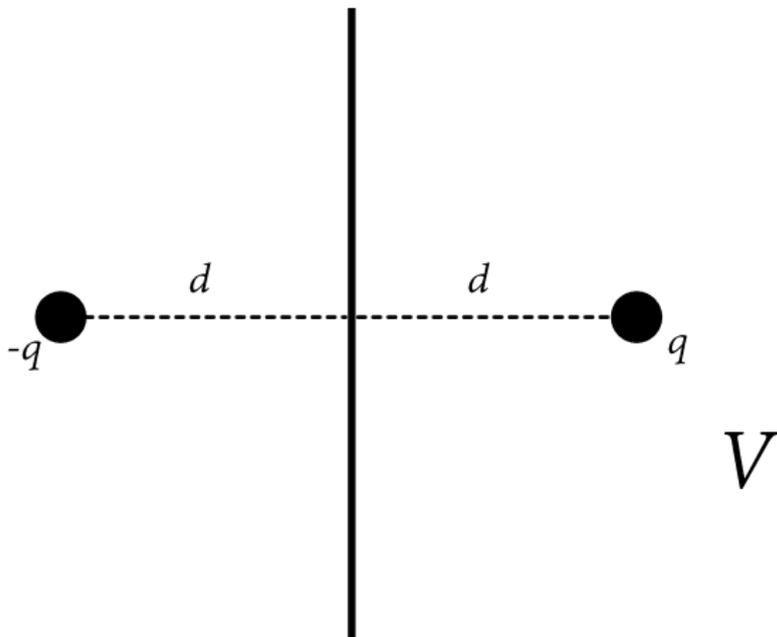
$$G_h[\mathbf{x}, \mathbf{x}'] + G[\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = 0 \quad (3)$$

cuando \mathbf{x} está en el borde de V .

El método de imágenes consiste en tratar de construir a G_h como el potencial de una distribución sencilla de cargas ubicadas *fuera* de V . Esto garantiza que el potencial construido de esta manera es solución de la ecuación de Laplace *en* V . Estas cargas constituyen la *imagen* de la carga física ubicada en \mathbf{x}' .



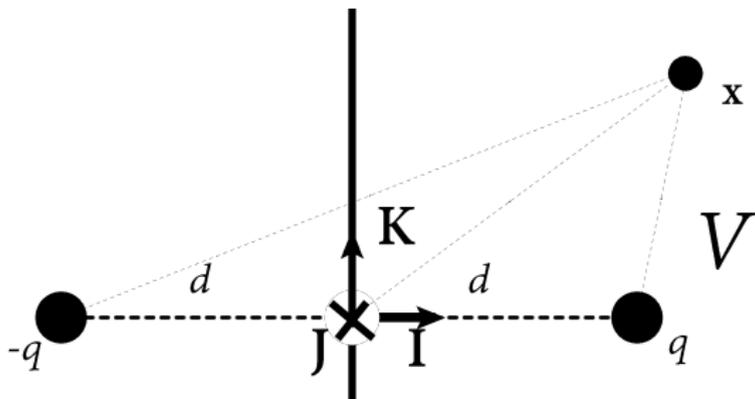
La imagen consiste en una carga $-q$ ubicada simétricamente



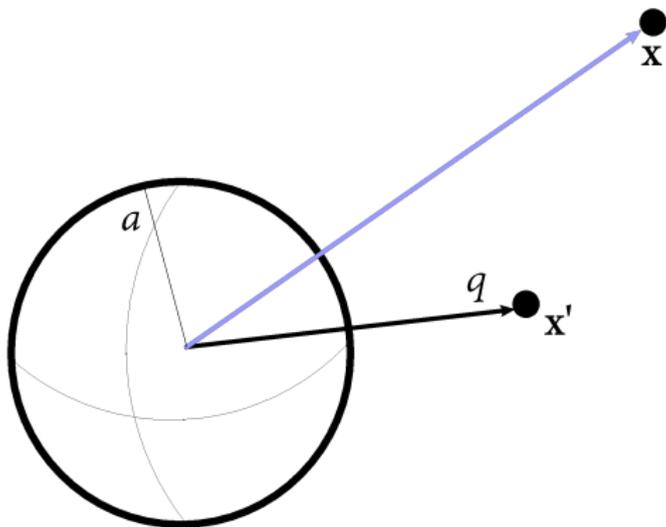
Si la carga original está en la posición $\mathbf{x}' = (d, 0, 0)$, entonces el potencial en la posición \mathbf{x} es

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= q \left\{ \frac{1}{|\mathbf{x} - d\mathbf{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + d\mathbf{l}|} \right\} \\ &= q \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right\}\end{aligned}\quad (4)$$

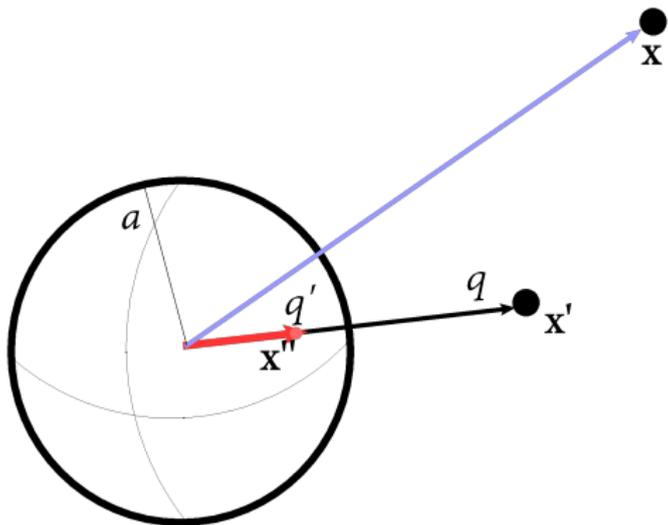
que efectivamente se anula si $x = 0$



Vimos qué pasa con un espejo plano. Qué pasaría con un espejo esférico, como el de Escher?



Por simetría, colocamos la imagen sobre el radio vector de la carga real, pero en este caso dejamos libres la posición y la magnitud de la carga imagen



Entonces, si $\mathbf{x} = r\mathbf{n}$, $\mathbf{x}' = r'\mathbf{n}'$, $\mathbf{x}'' = r''\mathbf{n}'$, y $q' = -\lambda q$,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= q \left\{ \frac{1}{|r\mathbf{n} - r'\mathbf{n}'|} - \frac{\lambda}{|r\mathbf{n} - r''\mathbf{n}'|} \right\} \\ &= q \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} - \frac{\lambda}{\sqrt{r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos \theta}} \right\}\end{aligned}\tag{5}$$

donde $\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$.

Pedir que esto se anule idénticamente cuando $r = a$ conduce a

$$a^2 + r''^2 - 2ar'' \cos \theta = \lambda^2 [a^2 + r'^2 - 2ar' \cos \theta] \quad (6)$$

como esto debe valer para todo θ , debe ser $r'' = \lambda^2 r'$, y además $\lambda = a/r'$. El potencial queda

$$q \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} - \frac{a}{r' \sqrt{r^2 + (a^2/r')^2 - 2r(a^2/r') \cos \theta}} \right\} \quad (7)$$

Está claro que el primer término es simétrico frente al intercambio de \mathbf{x} y \mathbf{x}' . Resulta que el segundo término también lo es, porque

$$r' \sqrt{r^2 + (a^2/r')^2 - 2r(a^2/r') \cos \theta} = \sqrt{r^2 r'^2 + a^4 - 2a^2 r r' \cos \theta} \quad (8)$$

La función de Green satisface la *relación de reciprocidad*

$$G_0 [\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = G_0 [\mathbf{x}', \mathbf{x}] \quad (9)$$

La condición de reciprocidad es general. La fórmula

$$\phi[\mathbf{x}'] = \int_V d^3x G_0[\mathbf{x}, \mathbf{x}'] \rho[\mathbf{x}] \quad (10)$$

más términos de superficie, muestra que

$$G_0[\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = \frac{\delta\phi[\mathbf{x}']}{\delta\rho[\mathbf{x}]} \quad (11)$$

pero también

$$\phi [\mathbf{x}'] = \frac{\delta U}{\delta \rho [\mathbf{x}']} \quad (12)$$

donde U es la energía de la distribución de carga, porque si cambia la distribución, $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$, entonces

$$dU = \int_V d^3x \phi [\mathbf{x}] \delta\rho [\mathbf{x}] \quad (13)$$

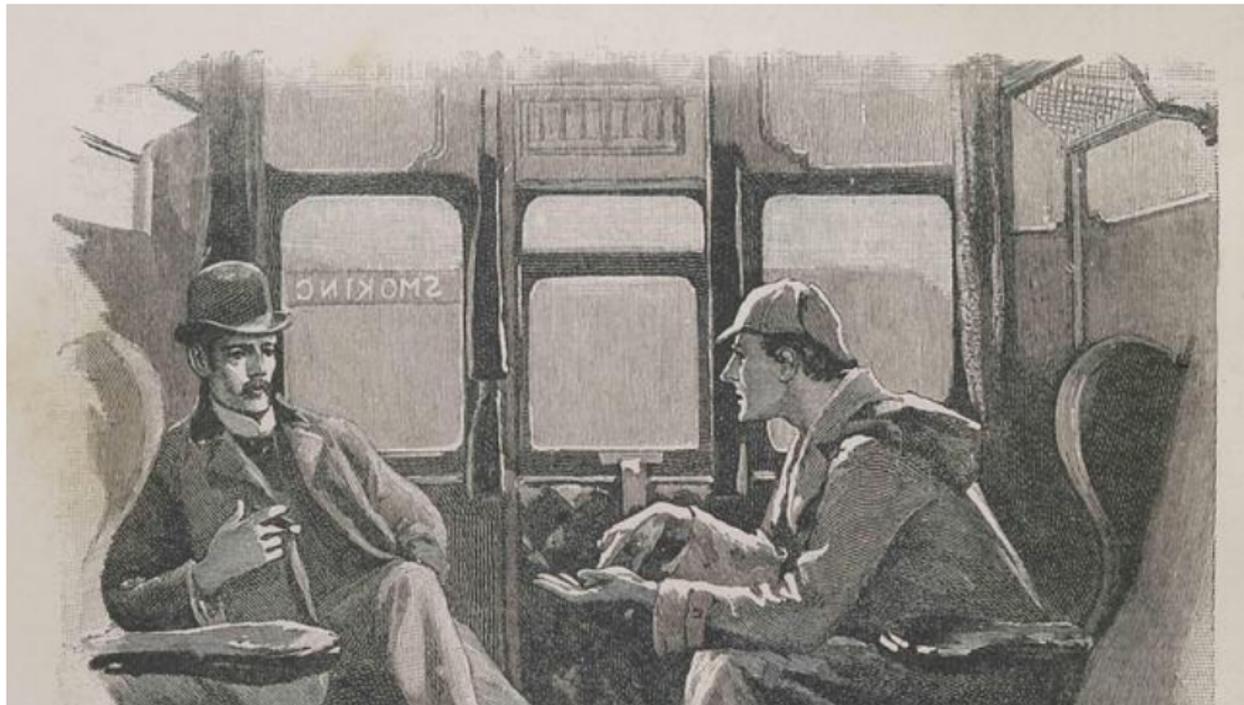
Por lo tanto,

$$G_0 [\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = \frac{\delta^2 U}{\delta \rho [\mathbf{x}] \delta \rho [\mathbf{x}']} \quad (14)$$

debe ser simétrica

DESARROLLOS ORTOGONALES

A veces no alcanza con el ingenio y hacen falta métodos sistemáticos para resolver problemas con condiciones de borde y/o encontrar la función de Green.

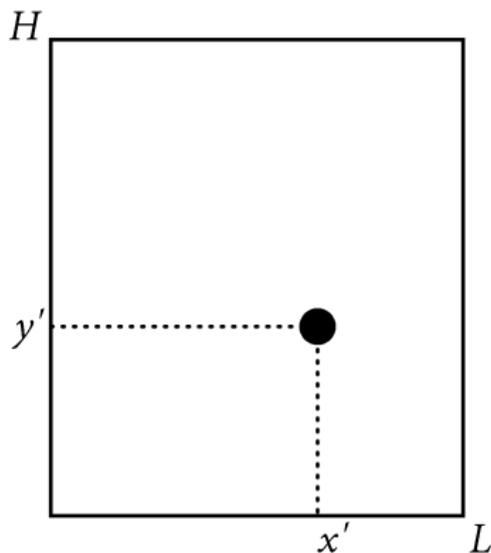


Supongamos que queremos encontrar la función de Green de una carga en un recipiente rectangular en dos dimensiones

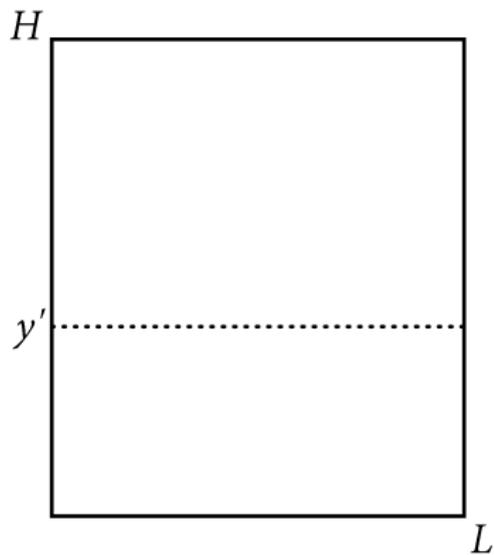
$$\Delta G_0 [(x, y); (x', y')] = \delta(x - x') \delta(y - y') \quad (15)$$

con condición de borde

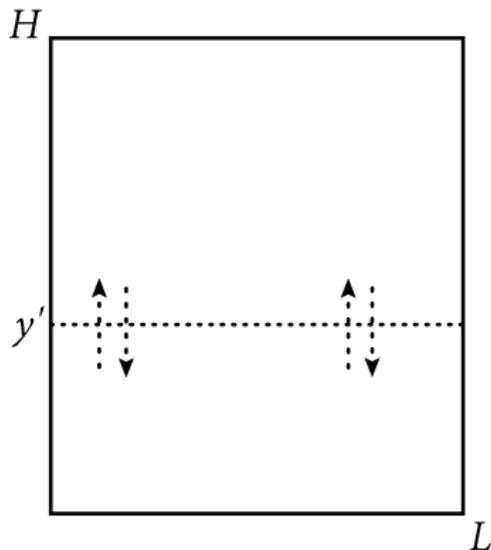
$$G_0 [(0, y); (x', y')] = G_0 [(L, y); (x', y')] = G_0 [(x, 0); (x', y')] = G_0 [(x, H); (x', y')] = 0.$$



Separamos la caja en dos mitades a la altura de y'



En cada mitad la delta es idénticamente nula, así que tenemos que resolver la ecuación de Laplace, y después ver cómo pegamos las soluciones a través de la línea $y = y'$



Para resolver la ecuación de Laplace, observamos que, si fijamos y , entonces $G_0 [x, y]$ se puede desarrollar en serie de senos

$$G_0 [x, y] = \sum_{n=1}^{\infty} g_n [y] \sin \left[n\pi \frac{x}{L} \right] \quad (16)$$

(pensar por analogía con la cuerda con extremos fijos de Física 2)

Entonces la ecuación que queremos resolver es

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta G_0 \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] G_0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 g_n [y]}{dy^2} \sin \left[n\pi \frac{x}{L} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} g_n [y] \frac{d^2}{dx^2} \sin \left[n\pi \frac{x}{L} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^2 g_n [y]}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 g_n [y] \right] \sin \left[n\pi \frac{x}{L} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

y para que la serie se anule se debe anular cada coeficiente

$$\frac{d^2 g_n [y]}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 g_n [y] = 0 \quad (18)$$

o sea que g_n se debe poder expresar en términos de senos y cosenos hiperbólicos.

Si $0 \leq y < y'$, debe ser $g_n[0] = 0$, por lo tanto

$$g_n[y] = A_n \sinh \left[n\pi \frac{y}{L} \right] \quad (19)$$

Si $y' < y \leq H$, debe ser $g_n[H] = 0$, por lo tanto

$$g_n[y] = B_n \sinh \left[n\pi \frac{H - y}{L} \right] \quad (20)$$

Tenemos la solución en cada mitad. Cómo las pegamos?



Resulta que la delta también se puede desarrollar en senos

$$\delta(x - x') = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[n\pi \frac{x}{L} \right] \sin \left[n\pi \frac{x'}{L} \right] \quad (21)$$

por lo tanto

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(y - y') \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[n\pi \frac{x}{L} \right] \sin \left[n\pi \frac{x'}{L} \right] \quad (22)$$

y entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta G_0 - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] G_0 - \delta(y - y') \delta(x - x') \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 g_n[y]}{dy^2} \sin \left[n\pi \frac{x}{L} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} g_n[y] \frac{d^2}{dx^2} \sin \left[n\pi \frac{x}{L} \right] \\ &\quad - \delta(y - y') \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[n\pi \frac{x}{L} \right] \sin \left[n\pi \frac{x'}{L} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^2 g_n[y]}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 g_n[y] - \frac{2}{L} \delta(y - y') \sin \left[n\pi \frac{x'}{L} \right] \right] \\ &\quad \sin \left[n\pi \frac{x}{L} \right] \end{aligned} \tag{23}$$

Entonces debe ser

$$\frac{d^2 g_n [y]}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 g_n [y] = \frac{2}{L} \delta (y - y') \sin \left[n\pi \frac{x'}{L} \right] \quad (24)$$

Integrando esta ecuación desde $y' - \epsilon$ hasta $y' + \epsilon$ encontramos

$$\frac{dg_n [y'^+]}{dy} - \frac{dg_n [y'^-]}{dy} = \frac{2}{L} \sin \left[n\pi \frac{x'}{L} \right] \quad (25)$$

y para que la ecuación tenga sentido g_n debe ser continua

$$g_n [y'^+] - g_n [y'^-] = 0 \quad (26)$$

Usando las expresiones que tenemos para g_n arriba y abajo de y' , encontramos un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} B_n \cosh \left[n\pi \frac{H - y'}{L} \right] + A_n \cosh \left[n\pi \frac{y'}{L} \right] &= \frac{-2}{n\pi} \sin \left[n\pi \frac{x'}{L} \right] \\ B_n \sinh \left[n\pi \frac{H - y'}{L} \right] - A_n \sinh \left[n\pi \frac{y'}{L} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Resolviéndolo encontramos la función de Green

$$\begin{aligned} G_0 [(x, y); (x', y')] &= \frac{-2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sinh n\pi \frac{H}{L}} \\ &\sinh \frac{n\pi}{L} (H - y_{>}) \sinh \frac{n\pi}{L} y_{<} \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L} x' \end{aligned} \quad (28)$$

donde $y_{>} = \max(y, y')$, $y_{<} = \min(y, y')$.

EJERCICIO

Mostrar que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{H \rightarrow \infty} G_0 \left[\left(\frac{L}{2} + x, \frac{H}{2} + y \right); \left(\frac{L}{2}, \frac{H}{2} \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \ln r + \text{const.} \quad (29)$$

($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) es el potencial Coulombiano en el plano.

Si solo nos interesa resolver el problema de la ecuación de Laplace con condiciones de contorno, no necesitamos pasar por la función de Green. Por ejemplo, supongamos que para $y = 0$ reemplazamos la condición $\phi(x, 0) = 0$ por $\phi(x, 0) = \phi^{(0)}(x)$. Si la condición de borde tiene un desarrollo

$$\phi^{(0)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^{(0)} \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (30)$$

entonces la solución es

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^{(0)}}{\sinh \frac{n\pi}{L} H} \sinh \frac{n\pi}{L} (H - y) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (31)$$

NOTA Consideremos las funciones definidas en el intervalo $[0, \pi]$ que se anulan en los bordes. Cuando decimos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx \quad (32)$$

queremos decir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} dx \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n \sin nx \right|^2 = 0 \quad (33)$$

(convergencia en norma) pero la serie no necesariamente converge absolutamente.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n \sin nx \right| \neq 0 \quad (34)$$

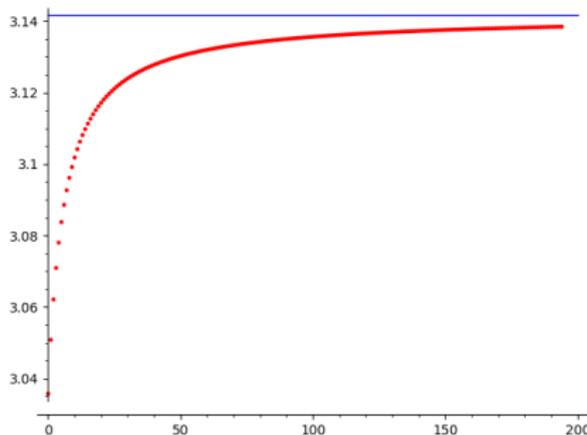
Por ejemplo, formalmente

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)} \quad (35)$$

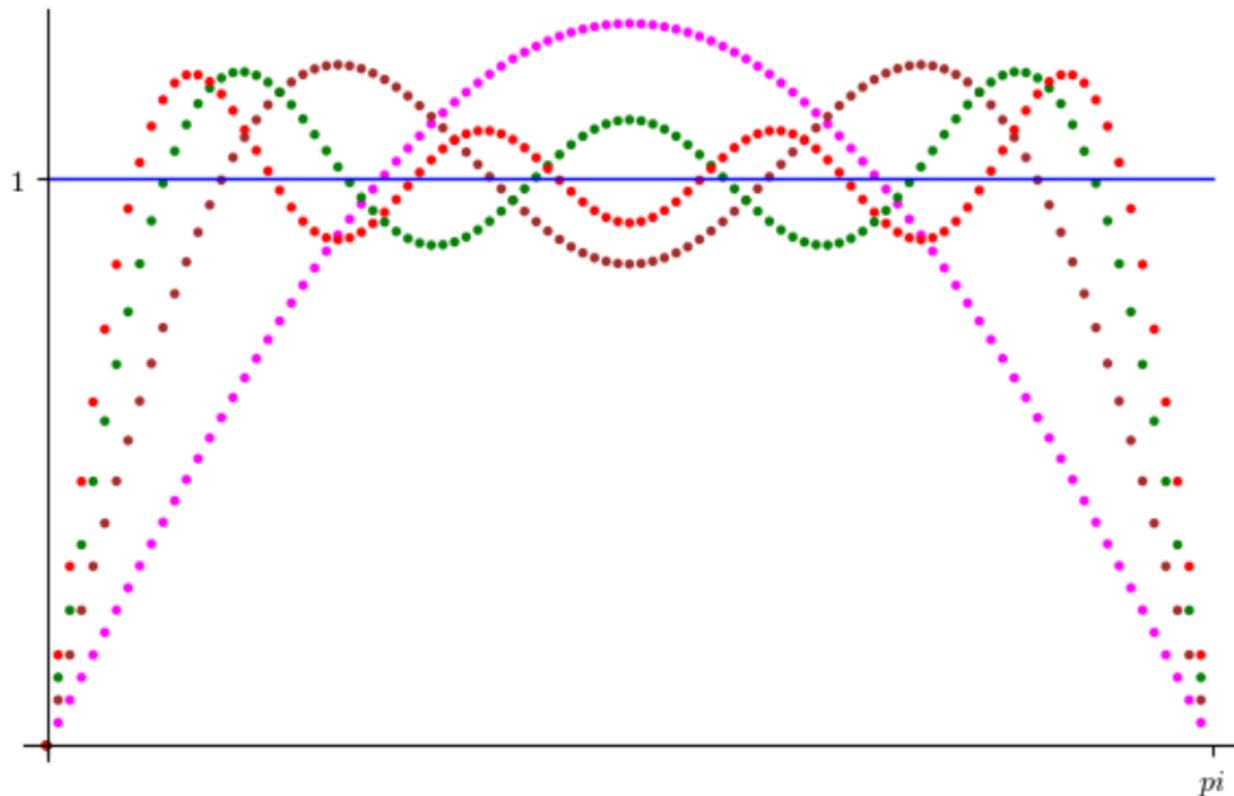
El gráfico muestra

$$\int_0^{\pi} dx \left| f(x) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^K \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)} \right|^2 \quad (36)$$

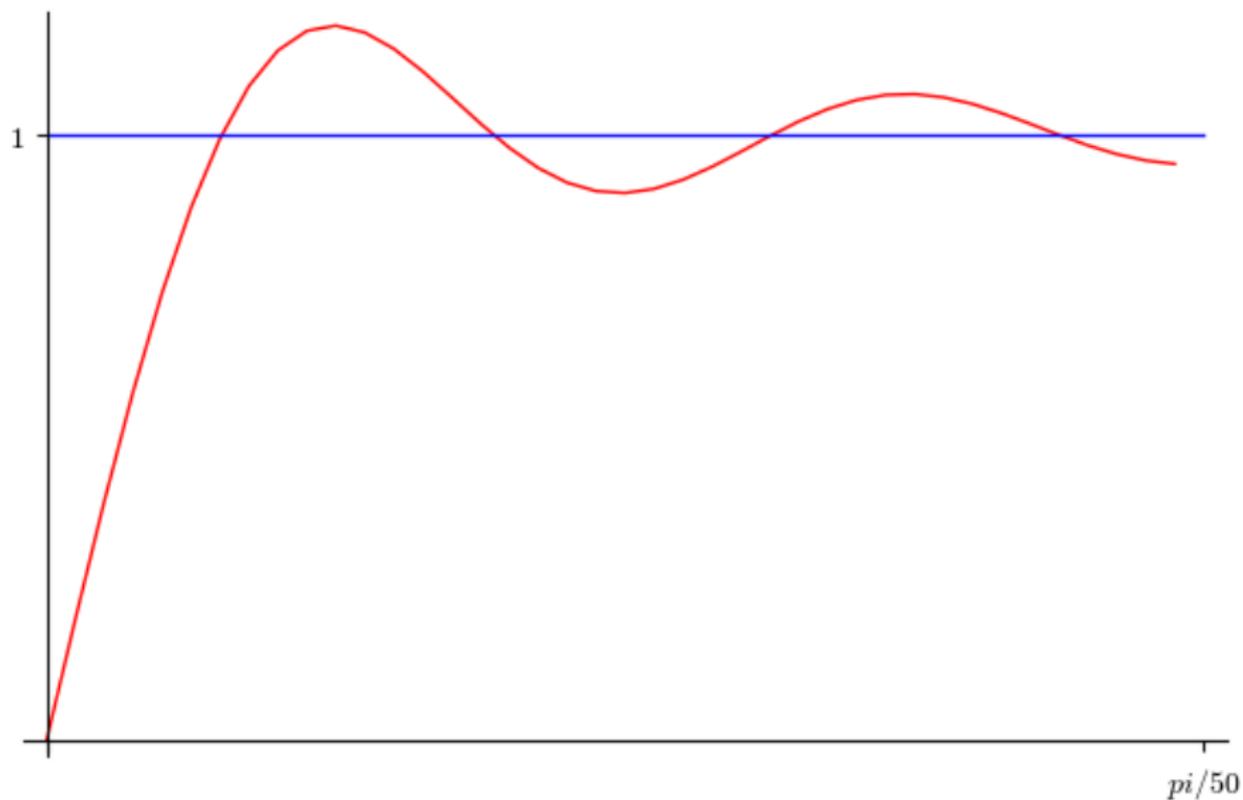
para $5 \leq K \leq 200$



Este muestra las sumas parciales para $K = 0, 1, 2, 3$



Y éste muestra la suma parcial para $K = 100$, para x entre 0 y $\pi/50$



Por qué funcionó?



El método funcionó porque

- ▶ Pudimos descomponer el problema en dos problemas unidimensionales, en x y en y (*separación de variables*)
- ▶ En la dirección x , encontramos un sistema de funciones, los senos, que nos permitieron descomponer fácilmente tanto la solución, como la delta
- ▶ El problema resultante en y para cada término de la serie era sencillo, esencialmente un oscilador invertido
- ▶ Las condiciones de soldadura también fueron manejables

A partir de la próxima clase vamos a familiarizarnos con otras familias de funciones, además de las trigonométricas, para realizar un análisis similar en problemas con geometrías más complejas