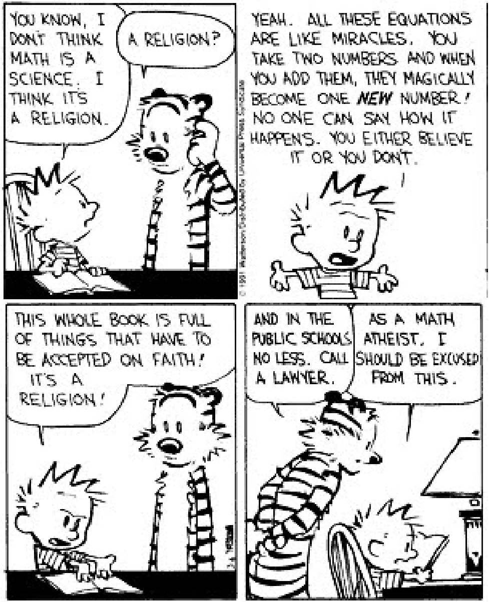
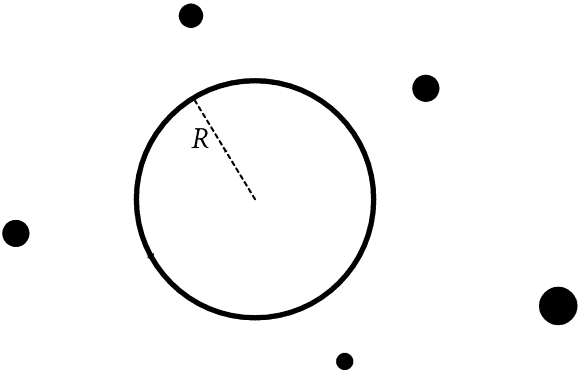
ARMONICOS ESFERICOS



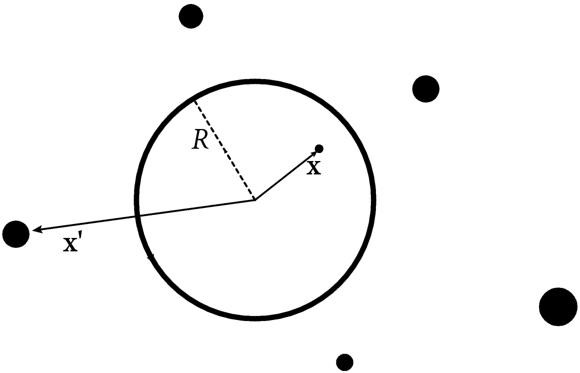
Comenzamos nuestro estudio de distintos sistemas de funciones ortogonales con los *armónicos esféricos*. Estas funciones van a ser útiles para resolver la ecuación de Laplace en problemas con simetría esférica

Consideramos el siguiente problema: hallar el potencial electroestático en el *interior* de una cavidad rodeada por una distribución arbitraria de cargas



Construimos el potencial por superposición

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{r'>R} d^3x' \, \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \tag{1}$$



Como en cada punto de la integral $|\mathbf{x}| < |\mathbf{x}'|$, podemos desarrollar

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\right| &= r'\sqrt{1 - \left(\frac{2\mathbf{n}'\cdot\mathbf{x}}{r'} - \frac{\mathbf{x}^2}{r'^2}\right)} \\
&= r'\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\mathbf{n}'\cdot\mathbf{x}}{r'} - \frac{\mathbf{x}^2}{r'^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2\mathbf{n}'\cdot\mathbf{x}}{r'} - \frac{\mathbf{x}^2}{r'^2}\right)^2 + \dots\right\}
\end{aligned} \tag{2}$$

Y en consecuencia el potencial

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) = \int_{r'>R} d^3x'\ \frac{\rho(\mathbf{x}')}{r'} &\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\mathbf{n}'\cdot\mathbf{x}}{r'} - \frac{\mathbf{x}^2}{r'^2}\right)\right. \\
+ &\left.\frac{3}{8}\left(\frac{2\mathbf{n}'\cdot\mathbf{x}}{r'} - \frac{\mathbf{x}^2}{r'^2}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(\frac{2\mathbf{n}'\cdot\mathbf{x}}{r'} - \frac{\mathbf{x}^2}{r'^2}\right)^3 + \dots\right\}
\end{aligned} \tag{3}$$

Agrupamos los términos del desarrollo según las potencias de **x** (estamos usando la convención de Einstein!)

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) = & \int_{r'>R} d^3x' \, \frac{\rho(\mathbf{x}')}{r'} + \left[\int_{r'>R} d^3x' \, \frac{\rho(\mathbf{x}')}{r'^2}\mathbf{n}'_k\right]\mathbf{x}^k \\
+ & \left[\int_{r'>R} d^3x' \, \frac{\rho(\mathbf{x}')}{r'^3}\left(\frac{3}{2}\mathbf{n}'_k\mathbf{n}'_j - \frac{1}{2}\delta_{kj}\right)\right]\mathbf{x}^k\mathbf{x}^j \\
+ & \left[\int_{r'>R} d^3x' \, \frac{\rho(\mathbf{x}')}{r'^4}\left(\frac{5}{2}\mathbf{n}'_k\mathbf{n}'_j\mathbf{n}'_l - \frac{3}{2}\delta_{kj}\mathbf{n}'_l\right)\right]\mathbf{x}^k\mathbf{x}^j\mathbf{x}^l \\
+ & \ldots
\end{aligned} \tag{4}$$

De esa manera obtenemos un desarrollo del potencial en el que el término l-simo es un *polinomio homogéneo* de grado l en x, y y z

$$\phi(\mathbf{x}) = Q_0(\mathbf{x}) + Q_1(\mathbf{x}) + Q_2(\mathbf{x}) + \dots \tag{5}$$

$$Q_l(\mathbf{x}) = r^l Q_l(\mathbf{n}) = r^l q_l(\theta, \varphi) \tag{6}$$

Como dentro de la cavidad no hay cargas, el potencial satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta\phi = 0 \tag{7}$$

Como ΔQ_l es un polinomio de orden $l-2$, se deduce que *cada Q_l es solución de Laplace, por separado*

$$\Delta Q_l = 0 \tag{8}$$

Para ver cuántos polinomios homogéneos de orden l independientes hay, observamos que un polinomio es una combinación lineal de términos de la forma $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$, donde α, β y γ son enteros no negativos que suman l. El número de combinaciones posibles es el combinatorio

$$\binom{l+2}{2} = \frac{1}{2}\left(l+2\right)\left(l+1\right) \tag{9}$$

El laplaciano de Q_l es un polinomio homogéneo de orden $l-2$, y por lo tanto pedir que Q_l sea un polinomio armónico equivale a imponer $l\left(l-1\right)/2$ restricciones sobre Q_l. Por lo tanto, el número de *polinomios homogéneos armónicos de orden l* es

$$\frac{1}{2}\left(l+2\right)\left(l+1\right) - \frac{1}{2}l\left(l-1\right) = 2l+1 \tag{10}$$

Por ejemplo, si $l = 0$ el único polinomio posible es una constante, que automáticamente tiene laplaciano nulo.

Un polinomio homogéneo con $l = 1$ es una combinación lineal de x, y y z. Las tres son funciones armónicas.

Con $l = 2$ puedo armar combinaciones lineales de x^2, y^2, z^2, xy, xz e yz. Las tres últimas son funciones armónicas. Con las tres primeras puedo armar dos funciones armónicas independientes, por ejemplo $x^2 - y^2$ y $x^2 + y^2 - 2z^2$. En total tengo 5 polinomios armónicos homogéneos independientes.

Nuestra próxima tarea es elegir una *base* de polinomios armónicos homogéneos. Es decir, para cada l queremos encontrar de una vez y para siempre $2l+1$ polinomios armónicos homogéneos Q_{lm} tal que todo Q_l posible se escriba como combinación lineal de aquéllos

$$Q_l(\mathbf{x}) = \sum_m c_{lm}\, Q_{lm}(\mathbf{x}) \tag{11}$$

Para eso es útil hacer un cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x_+ &= x + iy \\ x_- &= x - iy \end{aligned} \tag{12}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x_+}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_+} + \frac{\partial x_-}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_-} = \frac{\partial}{\partial x_+} + \frac{\partial}{\partial x_-} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial x_+}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x_+} + \frac{\partial x_-}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x_-} = i\left(\frac{\partial}{\partial x_+} - \frac{\partial}{\partial x_-}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

y el laplaciano se escribe como

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial x_+ \partial x_-} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{14}$$

En coordenadas polares

$$\begin{aligned} x_+ &= r\sin\theta\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\sin\theta\; e^{i\varphi} \\ x_- &= r\sin\theta\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r\sin\theta\; e^{-i\varphi} \end{aligned} \tag{15}$$

por lo tanto, un polinomio homogéneo tiene la pinta

$$x_+^{\alpha} x_-^{\beta} z^{\gamma} = r^l\,(\sin\theta)^{\alpha+\beta}\,(\cos\theta)^{\gamma}\, e^{i(\alpha-\beta)\varphi} \tag{16}$$

Como $0 \leq \alpha, \beta \leq l$, $m = \alpha - \beta$ toma valores entre $+l$ y $-l$, es decir, $2l + 1$ valores posibles.
PODEMOS ELEGIR NUESTRA BASE DE TAL MANERA QUE CADA ELEMENTO CORRESPONDA A UN VALOR DISTINTO DE *m*.

$$Q_{lm} \to Y_{lm} = P_{lm}(\theta)\, e^{im\varphi} \tag{17}$$

Por ejemplo, si $l = 0$ el único polinomio posible es una constante, correspondiente a $m = 0$.

Con $l = 1$ podemos tener $m = 1$, 0 o -1, correspondientes a $Y_{11} \propto x_+$, $Y_{10} \propto z$, y $Y_{1-1} \propto -x_-$ (por convención se define $Y_{l-m} = (-1)^m\, Y^*_{lm}$).

Con $l = 2$ podemos tener $m = \pm 2$, $m = \pm 1$ o $m = 0$. Con $m = 2$ la única posibilidad es $Y_{22} \propto x_+^2$, y similarmente, con $m = 1$ debe ser $Y_{21} \propto zx_+$. Pero con $m = 0$ tenemos dos posibilidades, x_+x_- o z^2. Ahora, si escribimos $Y_{20} = ax_+x_- + bz^2$, entonces $0 = \Delta Y_{20} = 4a + 2b$, de modo que debe ser $Y_{20} \propto x_+x_- - 2z^2$.

Los Y_{lm} son los *armónicos esféricos*.

PROPIEDADES DE LOS ARMONICOS ESFERICOS

El laplaciano en coordenadas esféricas

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\mathbf{L}^2 \tag{18}$$

Lo único que necesitamos saber sobre $\mathbf{L}^2$ es que es un operador que involucra a θ, φ, y derivadas respecto a θ y φ, pero no a r ni a derivadas respecto a r

$$-\mathbf{L}^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{19}$$

Entonces, si $r^l Y_{lm}(\theta,\varphi)$ es una función armónica, debe ser

$$r^{l-2}\left\{l(l+1)\,Y_{lm} - \mathbf{L}^2 Y_{lm}\right\} = 0 \tag{20}$$

Si además $Y_{lm} = P_{lm}(\theta)\,e^{im\varphi}$, entonces

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}P_{lm} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_{lm} = 0 \tag{21}$$

Definimos

$$\int d\Omega = \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \tag{22}$$

Si $m \neq m'$

$$\int d\Omega \; Y^*_{l'm'} Y_{lm} = \int \sin\theta \, d\theta \; P^*_{l'm'} P_{lm} \int_0^{2\pi} d\varphi \; e^{i(m-m')\varphi} = 0 \tag{23}$$

Si $l \neq l'$

$$\int d\Omega \; Y^*_{l'm} Y_{lm} = 0 \tag{24}$$

Los armónicos esféricos se normalizan de manera que

$$\int d\Omega \; Y^*_{lm} Y_{lm} = 1 \tag{25}$$

SOLUCION DE LA ECUACION DE LAPLACE EN COORDENADAS ESFERICAS

Para resolver la ecuación

$$\Delta F = 0 \tag{26}$$

postulamos un desarrollo en armónicos esféricos

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm}(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{27}$$

$$\Delta F = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{df_{lm}}{dr} \right] Y_{lm} - \frac{f_{lm}}{r^2} \mathbf{L}^2 Y_{lm} = 0 \tag{28}$$

pero $\mathbf{L}^2 Y_{lm} = l(l+1)\, Y_{lm}$, por lo que

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{df_{lm}}{dr} = l(l+1)\, f_{lm} \tag{29}$$

cuya solución es

$$f_{lm} = \frac{A_{lm}}{r^{l+1}} + B_{lm} r^l \tag{30}$$

ARMONICOS ESFERICOS CON $m = 0$

Los armónicos esféricos con $m = 0$ tienen una serie de propiedades especiales. Para empezar, un polinomio homogéneo con $m = 0$ debe tener, en cada término, la misma cantidad de factores de x_+ que de x_-. Por lo tanto, un armónico esférico con $m = 0$ puede pensarse como función de z y de $x_+ x_-$. Pero $z = \cos\theta$, y $x_+ x_- = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. De esta manera, $Y_{l0} = P_l$ termina siendo un polinomio de grado l en la variable $x = \cos\theta$. Estos polinomios, normalizados de tal manera que $P_l(1) = 1$, son los *polinomios de Legendre*.

Los primeros polinomios de Legendre son $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \left(3x^2 - 1\right)/2$, etc.

Por la ortogonalidad de los armónicos esféricos, tenemos que, si $l \neq l'$

$$\begin{aligned}
0 &= \int d\Omega Y_{l'0} Y_{l0} \\
&\propto 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \ \sin\theta \ P_{l'}[cos\theta] \, P_l[cos\theta] \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} dx \ P_{l'}[x] \, P_l[x] \qquad (31)
\end{aligned}$$

Como esto vale para todo $l' < l$, también es cierto que

$$\int_{-1}^{1} dx \ x^k P_l[x] = 0 \qquad (32)$$

para $k = 0, \ldots, l-1$. Estas son l condiciones que tiene que satisfacer P_l. Pero como un polinomio de grado l tiene a lo sumo $l+1$ coeficientes independientes, esto muestra que, a menos de multiplicar por una constante, el polinomio de Legendre P_l es el *único* polinomio ortogonal a todas las potencias de x menores que l

Ahora, la expresión

$$\frac{d^l}{dx^l}\left(1-x^2\right)^l \tag{33}$$

también define un polinomio de grado l que satisface

$$\int_{-1}^{1} dx\; x^k \frac{d^l}{dx^l}\left(1-x^2\right)^l = 0 \tag{34}$$

para $k = 0, \ldots, l-1$. Por lo tanto, obtenemos la *fórmula de Rodrigues*

$$P_l\left[x\right] = c_l \frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l \tag{35}$$

Solo queda calcular la constante c_l, que ocurre ser

$$c_l = \frac{1}{2^l l!} \tag{36}$$

Nótese que porque los polinomios de Legendre se normalizan pidiendo que

$$P_l\left[1\right] = 1 \tag{37}$$

mientras que los armónicos esféricos se normalizan pidiendo que

$$\int d\Omega \ Y_{l0}^2 = 1 \tag{38}$$

Y_{l0} y P_l son proporcionales, pero no iguales entre sí. La relación es

$$Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l\left[\cos\theta\right] \tag{39}$$

OTRAS PROPIEDADES

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}P_l + l\left(l+1\right)P_l = 0 \tag{40}$$

Si F es una función armónica con simetría de rotación alrededor del eje z, entonces

$$F\left(\mathbf{x}\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l\right)P_l\left[\cos\theta\right] \tag{41}$$

Si $m \neq 0$, entonces $Y_{lm}\left[0,\varphi\right] = Y_{lm}\left[\pi,\varphi\right] = 0$. Entonces, si

$$F\left(\mathbf{x}\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_{lm}\left(r\right)Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right) \tag{42}$$

sobre el eje z tenemos

$$F\left(r\mathbf{K}\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}f_{l0}\left(r\right) \tag{43}$$