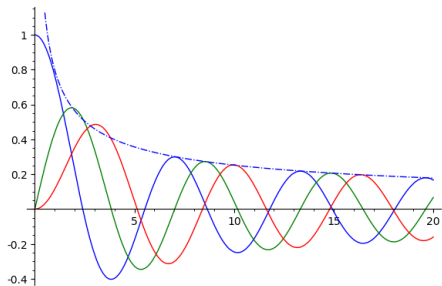
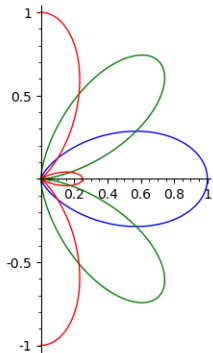


# ARMONICOS ESFERICOS Y FUNCIONES DE BESSEL



La clase pasada vimos el operador de Laplace en coordenadas esféricas

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2 \quad (1)$$

$$-\mathbf{L}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2)$$

Existe una base de funciones armónicas de la forma

$$F_{lm}(r, \theta, \varphi) = f_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3)$$

donde  $f_{lm} = r^l$  ó  $r^{-(l+1)}$ .

Los  $Y_{lm}$  son los armónicos esféricos y satisfacen

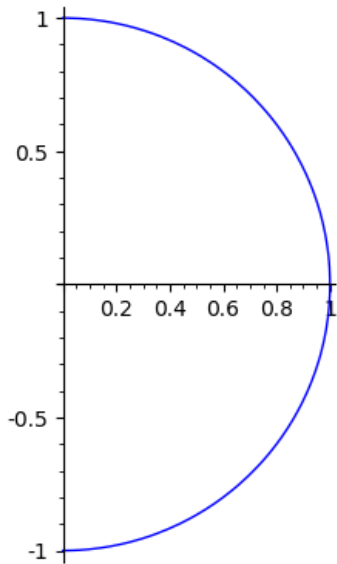
$$\begin{aligned}\mathbf{L}^2 Y_{lm} &= l(l+1) Y_{lm} \\ \int d\Omega Y_{l'm'}^* Y_{lm} &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ Y_{lm}^* &= (-1)^m Y_{l-m}\end{aligned}\tag{4}$$

Además pueden descomponerse como  $Y_{lm} = e^{im\varphi} P_{lm}(\theta)$

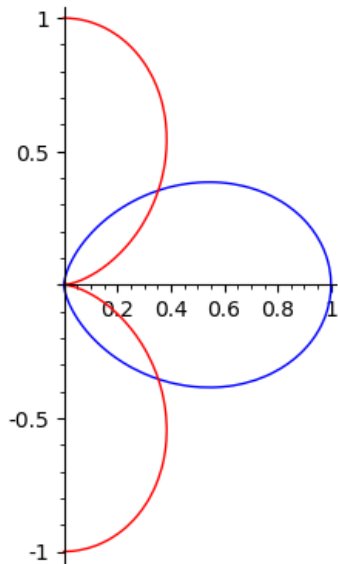
$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \sin\theta \frac{d}{d\theta} P_{lm} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] P_{lm} = 0\tag{5}$$

# Algunos gráficos

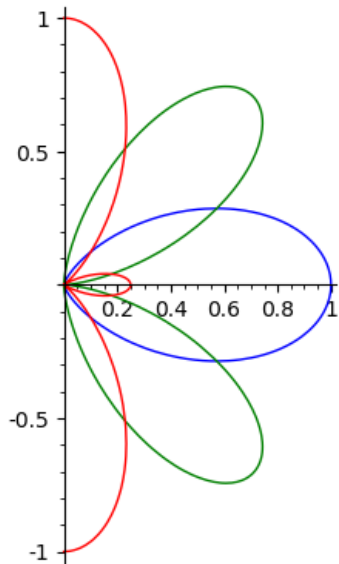
$$l = 0$$



$$l = 1$$

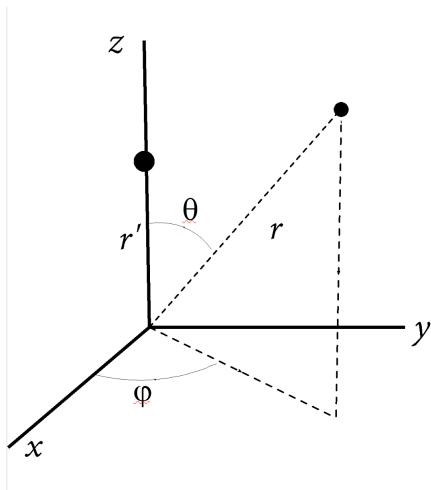


$$l = 2$$



## EJEMPLO: DESCUBRIENDO EL POTENCIAL DE COULOMB

Vamos a tomar como ejemplo escribir el potencial de una carga ubicada en  $\mathbf{x}' = r'\mathbf{K}$  como expansión en armónicos esféricos.



$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} F_l(r) P_l[\cos \theta] \quad (6)$$

Si  $r > r'$

$$F_l(r) = \frac{A_l}{r^{l+1}} \quad (7)$$

Si  $r < r'$

$$F_l(r) = B_l r^l \quad (8)$$



Si una función  $f$  es continua, sus valores sobre el eje  $z$  no dependen de  $\varphi$ . Entonces, la delta con soporte en un punto del eje  $z$  tiene la propiedad de que

$$\int r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi f(r, \theta, \varphi) \delta(\mathbf{x} - r'\mathbf{K}) = f(r', \theta = 0) \quad (9)$$

Por lo tanto podemos escribir la delta como

$$\delta(\mathbf{x} - r'\mathbf{K}) = \frac{\delta(r - r')}{r'^2} \frac{\delta(\theta)}{2\pi \sin \theta} \quad (10)$$

Como esta delta no depende de  $\varphi$  podemos desarrollarla en serie de polinomios de Legendre

$$\frac{\delta(\theta)}{2\pi \sin \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l[\cos \theta] \quad (11)$$

Los coeficientes son deducidos por la relación de ortogonalidad

$$C_l \int d\Omega P_l^2[\cos \theta] = \int d\Omega P_l[\cos \theta] \frac{\delta(\theta)}{2\pi \sin \theta} = 1 \quad (12)$$

de modo que

$$C_l = \frac{2l+1}{4\pi} \quad (13)$$

La ecuación de Poisson

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta \phi [\mathbf{x}] - \delta(\mathbf{x} - r'\mathbf{K}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dF_l}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} F_l - \frac{2l+1}{4\pi} \frac{\delta(r-r')}{r'^2} \right] P_l \end{aligned} \quad (14)$$

La ecuación para la parte radial es

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{df_l}{dr} - l(l+1) f_l = \frac{2l+1}{4\pi} \delta(r-r') \quad (15)$$

de donde obtenemos las condiciones de soldadura

$$\begin{aligned} \frac{A_l}{r'^{l+1}} - B_l r'^l &= 0 \\ -(l+1) \frac{A_l}{r'^l} - l B_l r'^{l+1} &= \frac{2l+1}{4\pi} \end{aligned} \quad (16)$$

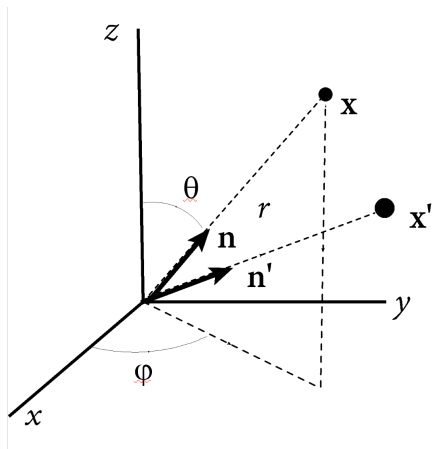
y finalmente

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l[\cos \theta] \quad (17)$$

Podemos escribir esta fórmula de una manera que es independiente de la elección de los ejes coordenados

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l[\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}] \quad (18)$$

Qué pasa si la carga no se encuentra sobre el eje?



Como no hay simetría axial, hay que usar el desarrollo completo.

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l F_{lm}(r) Y_{lm}[\theta, \varphi] \quad (19)$$

Si  $r > r'$

$$F_{lm}(r) = \frac{A_{lm}}{r^{l+1}} \quad (20)$$

Si  $r < r'$

$$F_{lm}(r) = B_{lm} r^l \quad (21)$$

Ahora la delta satisface

$$\int r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi f(r, \theta, \varphi) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = f(r', \theta', \varphi') \quad (22)$$

Por lo tanto podemos escribir la delta como

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{\delta(r - r')}{r'^2} \frac{\delta(\theta - \theta')}{\sin \theta'} \delta(\varphi - \varphi') \quad (23)$$

que también se puede desarrollar en serie de armónicos esféricos

$$\frac{\delta(\theta - \theta')}{\sin \theta'} \delta(\varphi - \varphi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} Y_{lm}[\theta, \varphi] \quad (24)$$

Los coeficientes son deducidos por la relación de ortogonalidad

$$C_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*[\theta, \varphi] \frac{\delta(\theta - \theta')}{\sin \theta'} \delta(\varphi - \varphi') = Y_{lm}^*[\theta', \varphi'] \quad (25)$$



La manera sistemática de encontrar la expresión de la delta en coordenadas curvilíneas es: si  $x^i = f^i(\xi^j)$  y  $x'^i = f^i(\xi'^j)$ , entonces

$$\delta(x^i - x'^i) = \frac{1}{D} \delta(\xi^j - \xi'^j) \quad (26)$$

donde

$$D = \det \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \quad (27)$$

Por otro lado, el elemento de volumen también involucra el mismo determinante

$$d^3x = D d^3\xi \quad (28)$$

## La ecuación de Poisson

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta \phi [\mathbf{x}] - \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \frac{d}{dr} r^2 \frac{dF_{lm}}{dr} - l(l+1)F_{lm} - Y_{lm}^* [\mathbf{n}'] \delta (r - r') \right] \frac{Y_{lm}}{r^2} \end{aligned} \quad (29)$$

## Las relaciones de soldadura

$$\begin{aligned} \frac{A_{lm}}{r'^{l+1}} - B_{lm}r'^l &= 0 \\ -(l+1) \frac{A_{lm}}{r'^l} - lB_{lm}r'^{l+1} &= Y_{lm}^* [\theta', \varphi'] \end{aligned} \quad (30)$$

y la solución

$$\phi (\mathbf{x}) = (-1) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'_{<}}{r'_{>}} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^* [\theta', \varphi'] Y_{lm} [\theta, \varphi] \quad (31)$$

Comparando las dos expresiones que hemos obtenido para el potencial coulombiano encontramos el *teorema de adición de armónicos esféricos*

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l[\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}] \\ &= (-1) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*[\theta', \varphi'] Y_{lm}[\theta, \varphi] \quad (32) \end{aligned}$$

implican

$$P_l[\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}] = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*[\theta', \varphi'] Y_{lm}[\theta, \varphi] \quad (33)$$

## PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE

Un problema de Sturm-Liouville comienza con una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{d}{dx} p \frac{df_\lambda}{dx} - q f_\lambda + \lambda \rho f_\lambda = 0 \quad (34)$$

para una función  $f$  definida en un intervalo  $[a, b] \in \mathbf{R}$ .  $p$ ,  $q$  y  $\rho$  son funciones reales dadas, y el “autovalor”  $\lambda$  es un número real.

Dadas las “autofunciones”  $f_\lambda$  y  $f_{\lambda'}$  para autovalores  $\lambda' \neq \lambda$ , vamos a calcular de dos maneras distintas la integral

$$G = \int_a^b dx \frac{d}{dx} \left[ f_{\lambda'}^* p \frac{df_\lambda}{dx} - f_\lambda p \frac{df_{\lambda'}^*}{dx} \right] \quad (35)$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$G = \left[ f_{\lambda'}^* \rho \frac{df_{\lambda}}{dx} - f_{\lambda} \rho \frac{df_{\lambda'}^*}{dx} \right]_a^b \quad (36)$$

Usando la ecuación de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} G &= \int_a^b dx \left[ f_{\lambda'}^* (qf_{\lambda} - \lambda \rho f_{\lambda}) - f_{\lambda} (qf_{\lambda'}^* - \lambda' \rho f_{\lambda'}^*) \right] \\ &= (\lambda' - \lambda) \int_a^b dx \rho f_{\lambda'}^* f_{\lambda} \end{aligned} \quad (37)$$

Por lo tanto, autofunciones de autovalores distintos son ortogonales respecto a la medida  $\rho dx$  si

$$\rho \left[ f_{\lambda'}^* \frac{df_{\lambda}}{dx} - f_{\lambda} \frac{df_{\lambda'}^*}{dx} \right] \quad (38)$$

se anula en los bordes del intervalo de definición.

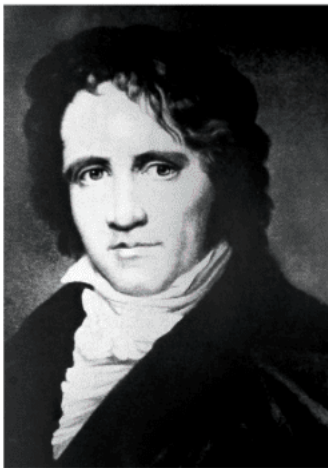
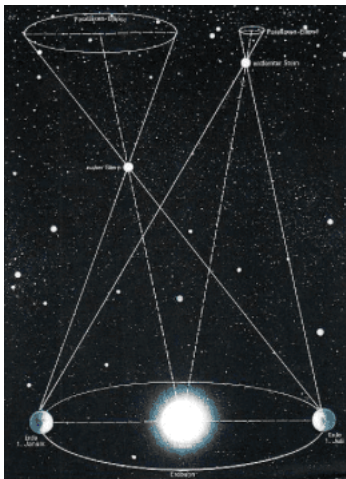
Las funciones  $P_{lm}[\theta]$  satisfacen

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} P_{lm} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_{lm} = 0 \quad (39)$$

en el intervalo  $[0, \pi]$ . Este es un problema de Sturm-Liouville con  $p = \rho = \sin \theta$  y  $q = m^2 / \sin \theta$ . Como  $p$  se anula en los bordes, con las funciones  $P_{lm}$  permaneciendo acotadas, vemos que las  $P_{lm}$  satisfacen la relación de ortogonalidad

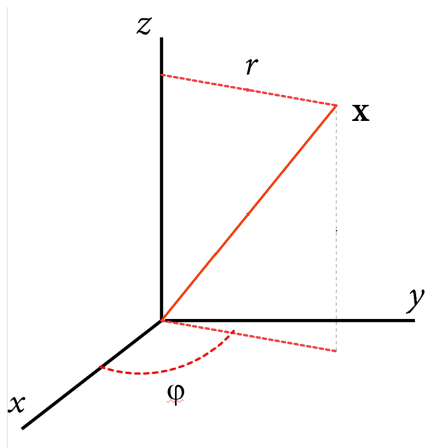
$$\int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \, P_{l'm}^* P_{lm} = 0 \quad (l' \neq l) \quad (40)$$

# LA ECUACION DE LAPLACE EN COORDENAS CILINDRICAS- FUNCIONES DE BESSEL



Consideremos la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (41)$$





Proponemos una solución

$$F_{\kappa m}(z, r, \varphi) = e^{\pm \kappa z} e^{\pm i m \varphi} f_{\kappa m}(r) \quad (42)$$

con  $\kappa \in \mathbf{R}_+$ ,  $m \in \mathbf{N}_{\cup\{0\}}$ , y obtenemos

$$\frac{d^2}{dr^2} f_{\kappa m} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f_{\kappa m} + \left[ \kappa^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] f_{\kappa m} = 0 \quad (43)$$

Si definimos  $x = \kappa r$ , esta se convierte en la *Ecuación de Bessel* para  $f_{\kappa m}(r) = f_m(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2} f_\nu + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} f_\nu + \left[ 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right] f_\nu = 0 \quad (44)$$

reemplazando  $\nu = m$

Las *funciones de Bessel*  $J_\nu(x)$  son las soluciones reales de la ecuación de Bessel que permanecen acotadas cuando  $x \rightarrow 0$ . Cuando  $\nu = n \in \mathbf{Z}$ , se las puede obtener de la relación

$$F[z, \theta] = e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta} \quad (45)$$

Para verificar que las  $J_n$  son efectivamente soluciones de la ecuación de Bessel, vemos que

$$\left[ z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z \frac{\partial}{\partial z} + z^2 \right] F[z, \theta] + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} F[z, \theta] = 0 \quad (46)$$

Desarrollando Fourier ambos miembros

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + z^2 - n^2 \right] J_n(z) \right\} e^{in\theta} = 0 \quad (47)$$

y eso implica que cada término debe anularse por separado.

Invirtiendo la transformación de Fourier obtenemos

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-in\theta} e^{iz \sin \theta} \quad (48)$$

La realidad de las  $J_n$  sale de que la parte imaginaria del integrando es impar. También se ve que  $J_{-n}(z) = J_n(-z)$ .

Llamando  $t = e^{i\theta}$  obtenemos

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{dt}{t^{n+1}} e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} \quad (49)$$

Desarrollando las exponenciales obtenemos el desarrollo en serie

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!2^k} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{dt}{t^{n+1}} \left( t - \frac{1}{t} \right)^k \right] \quad (50)$$

Se ve que si  $n$  es par sólo sobreviven las potencias pares, y si  $n$  es impar, las impares.

Las integrales se pueden calcular usando el teorema de los residuos: si  $M \in \mathbf{Z}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} dt t^M &= 0 \quad (M \neq -1) \\ &= 1 \quad (M = -1) \end{aligned} \quad (51)$$

Se ve que el primer término no nulo de la serie de Taylor corresponde a  $k = n$  y en ese caso el corchete vale 1, por lo tanto

$$J_n(z) \approx \frac{z^n}{n!2^n} \quad (z \rightarrow 0) \quad (52)$$

La sustitución  $f_\nu = \phi_\nu(x) / \sqrt{x}$  convierte a la ecuación de Bessel en

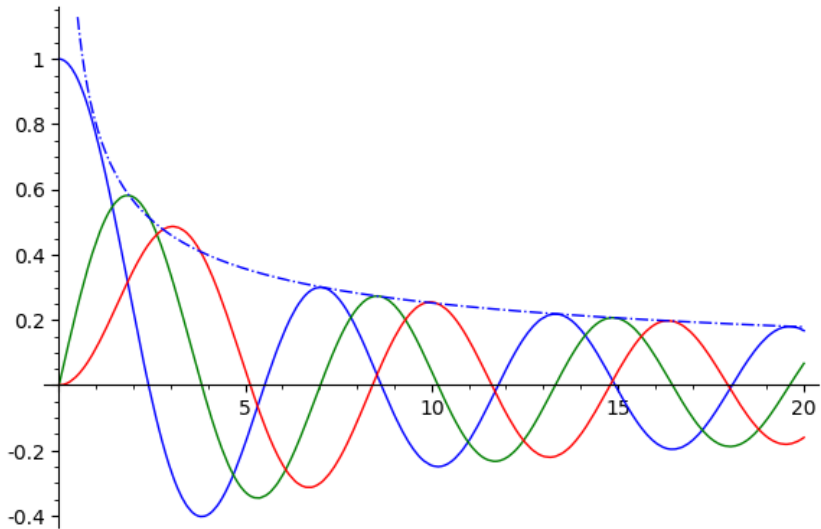
$$\frac{d^2}{dx^2} \phi_\nu + \left[ 1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right] \phi_\nu = 0 \quad (53)$$

Por lo tanto, cuando  $x \gg \nu$  esperamos que cualquier solución real de la ecuación de Bessel se pueda aproximar como

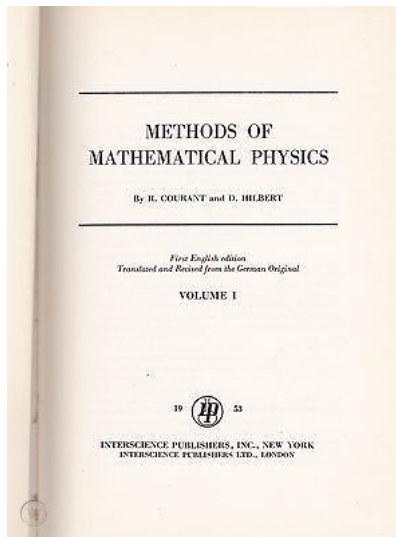
$$f_\nu(x) \propto \frac{\sin(x + \delta_\nu)}{\sqrt{x}} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (54)$$

Para las  $J_n$ , se puede obtener la forma asintótica evaluando la representación integral por el *método del punto silla*,

$$J_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (55)$$



Para más detalles sobre los temas de las clase pasada, ésta y la que viene, ver





O háganle caso a Landau y prueben con



O háganle caso a Landau y prueben con



...O era éste?

A COURSE OF  
**Higher Mathematics**

VOLUME III  
PART TWO

V. I. SMIRNOV

*Translated by*  
D. E. BROWN

*Translation edited by*  
I. N. SNEDDON  
*Simon Professor in Mathematics*  
*University of Glasgow*

PERGAMON PRESS

OXFORD · LONDON · EDINBURGH · NEW YORK  
PARIS · FRANKFURT

ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC.  
READING, MASSACHUSETTS · PALO ALTO · LONDON

1964

Como la ecuación de Bessel es de segundo orden, para cada  $m$  admite dos soluciones independientes. Hasta ahora hemos encontrado una (la  $J_m$ ), nos falta encontrar la segunda.

En la clase que viene completaremos esa parte de nuestro análisis y avanzaremos con la aplicación de funciones de Bessel para resolver la ecuación de Poisson en coordenadas cilíndricas.