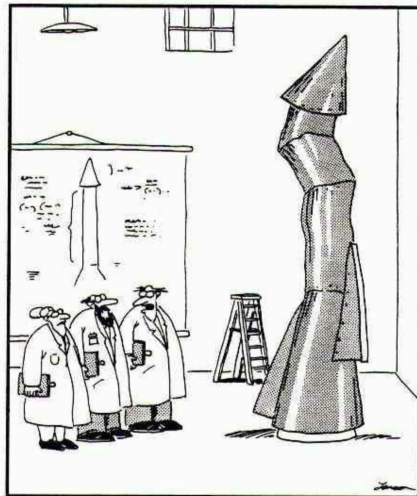


FUNCIONES DE BESSEL (II)



"It's time we face reality, my friends. ...
We're not exactly rocket scientists."

La vez pasada empezamos a estudiar la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2}{dr^2} f_{\kappa n} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f_{\kappa n} + \left[\kappa^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] f_{\kappa n} = 0 \quad (1)$$

Es un problema de Sturm-Liouville con $p = \rho = r$ y $q = n^2/r$. Las funciones de Bessel $J_n(\kappa r)$ son las soluciones reales de esta ecuación que permanecen acotadas cuando $r \rightarrow 0$.

Además

$$\begin{aligned} J_n(\kappa r) &\rightarrow \frac{(\kappa r)^n}{\Gamma[n+1] 2^n} && (r \rightarrow 0) \\ &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} \cos\left(\kappa r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) && (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2)$$

Necesitamos encontrar una segunda solución independiente.

Si tenemos dos soluciones f_λ y g_λ de un problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} p \frac{df_\lambda}{dx} - qf_\lambda + \lambda \rho f_\lambda = 0 \quad (3)$$

Cómo podemos saber si son independientes?

Si las funciones p , q , ρ son suaves, la solución con datos $f_\lambda(x_0)$ y $f'_\lambda(x_0)$ es única.

Si f_λ y g_λ son *dependientes*, existen α y β no nulos tales que $\alpha f_\lambda + \beta g_\lambda \equiv 0$. Por lo tanto, también $\alpha f'_\lambda + \beta g'_\lambda \equiv 0$. Eso implica que el *Wronskiano*

$$\begin{aligned} W[g_\lambda, f_\lambda] &= \det \begin{pmatrix} g_\lambda & f_\lambda \\ g'_\lambda & f'_\lambda \end{pmatrix} \\ &= g_\lambda f'_\lambda - f_\lambda g'_\lambda = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

En un problema de Sturm-Liouville, vale que

$$pW[g_\lambda, f_\lambda] = g_\lambda (pf'_\lambda) - f_\lambda (pg'_\lambda) = \text{constante} \quad (5)$$

Las *funciones de Hankel* $H_n^{(1)}(\kappa r)$ y $H_n^{(2)}(\kappa r)$ son las soluciones de la ecuación de Bessel tales que

$$H_n^{(1,2)}(\kappa r) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} e^{\pm i(\kappa r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (6)$$

Entonces

$$rW [H_n^{(2)}, H_n^{(1)}] = \frac{4i}{\pi} \neq 0 \quad (7)$$

Las funciones de Hankel son un par de soluciones independientes de la ecuación de Bessel.

Además

$$rW [J_n, H_n^{(1)}] = \frac{2i}{\pi} \neq 0 \quad (8)$$

Definimos la *función de Neumann* como la parte imaginaria de la función de Hankel

$$H_n^{(1,2)}(\kappa r) = J_n(\kappa r) \pm iN_n(\kappa r) \quad (9)$$

N_n es una solución real de la ecuación de Bessel, independiente de J_n . Por la forma asintótica de las funciones de Hankel

$$N_n(\kappa r) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} \sin\left(\kappa r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (10)$$

Además

$$rW [J_n, N_n] = \frac{2}{\pi} \quad (11)$$

Como $rW [J_n, N_n]$ es constante, la podemos evaluar para $\kappa r \ll n$, donde obtenemos

$$\frac{2}{\pi} = \frac{(\kappa r)^n}{\Gamma [n + 1] 2^n} [rN'_n - nN_n] \quad (12)$$

De modo que, si $n \neq 0$,

$$N_n(\kappa r) \rightarrow -\Gamma [n + 1] 2^n \frac{(\kappa r)^{-n}}{\pi} \quad (r \rightarrow 0) \quad (13)$$

Si $n = 0$, $N_0 \rightarrow (2/\pi) \ln r$.

Las funciones de Hankel y Neumann divergen cuando $r \rightarrow 0$

Incidentalmente

$$rW[J_{-\nu}, J_{\nu}] = \frac{2 \sin \nu\pi}{\pi} \quad (14)$$

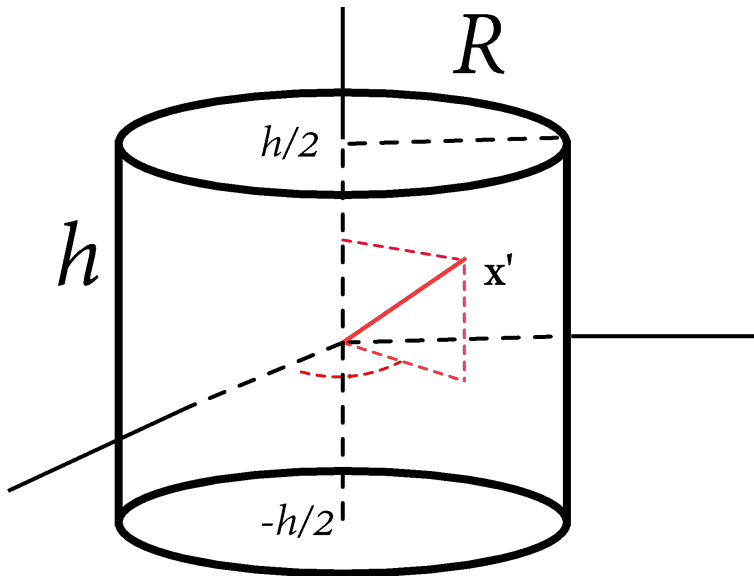
Por lo tanto, estas dos funciones *también* son independientes, salvo cuando $\nu = n \in \mathbf{Z}$.

FUNCIONES DE GREEN EN LATA

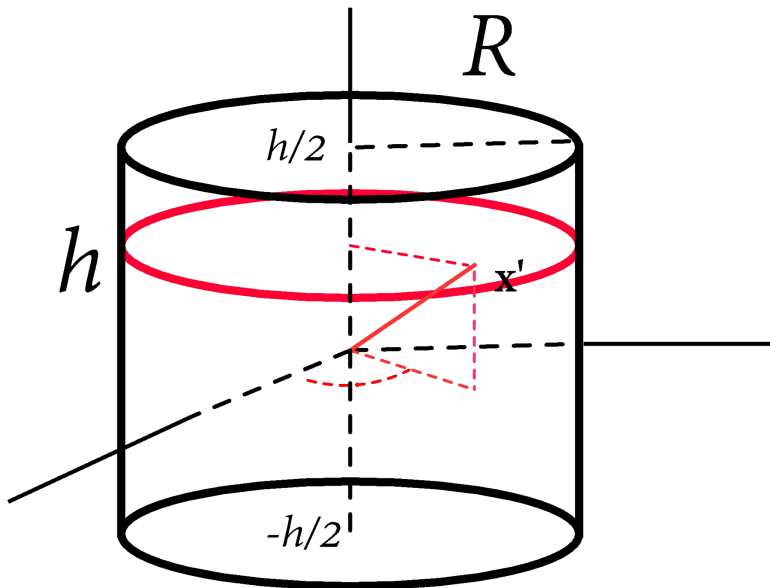


Andy Warhol THE WARDOL COLLECTION

Elegimos coordenadas cilíndricas de manera que la lata quede centrada.



Estrategia I: Partimos la lata en dos a la altura del punto fuente.



Llamaremos región I a la región $z < z'$, región II a la región $z > z'$. Como la solución debe ser regular en $r = 0$, descartamos una solución que contenga funciones de Neumann. Entonces en cada región hay una base de funciones

$$F_{m\kappa}^{I,II}(z, r, \varphi) = e^{im\varphi} J_{|m|}(\kappa r) f_{\kappa}^{I,II}(z) \quad (15)$$

Los valores posibles de κ están restringidos por la condición de contorno $J_m(\kappa R) = 0$. Eso selecciona una serie discreta $\kappa_{nm} = x_{nm}/R$, donde x_{nm} es el n -ésimo cero de $J_m(x)$. La dependencia en z es entonces

$$\begin{aligned} f_{nm}^I(z) &= \sinh \kappa_{nm} \left(z + \frac{h}{2} \right) \\ f_{nm}^{II}(z) &= \sinh \kappa_{nm} \left(\frac{h}{2} - z \right) \end{aligned} \quad (16)$$

La pregunta que nos tenemos que hacer es si es posible construir un sistema ortogonal a partir de las funciones $J_m(x_{nm}r/R)$; en particular, si podemos desarrollar la $\delta(r - r')/r$ como superposición de estas funciones.

La vez pasada mostramos que, si f_λ y $f_{\lambda'}$ son dos soluciones de un problema de Sturm-Liouville en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$(\lambda' - \lambda) \int_a^b dx \rho f_{\lambda'}^* f_\lambda = \left\{ p \left[f_{\lambda'}^* \frac{df_\lambda}{dx} - f_\lambda \frac{df_{\lambda'}^*}{dx} \right] \right\} \Big|_a^b \quad (17)$$

Aplicamos esta propiedad con $f_\lambda = J_m(\kappa r)$, $f_{\lambda'} = J_m(\kappa' r)$, $\lambda = \kappa^2$, $\lambda' = \kappa'^2$, $\rho = \rho = r$, $a = 0$ y $b = R$. Vemos inmediatamente que $J_m(x_{nm}r/R)$ y $J_m(x_{n'm}r/R)$ son ortogonales si $n \neq n'$, y

$$\begin{aligned} \int_0^R r dr J_m^2(x_{nm}r/R) &= \frac{R}{2\kappa} \frac{dJ_m(\kappa R)}{d\kappa} \frac{dJ_m(x_{nm}r/R)}{dr} \Big|_{\kappa=x_{nm}/R, r=R} \\ &= \frac{R^2}{2} \left(\frac{dJ_m}{dx} \right)^2(x_{nm}) \equiv R^2 J_{nm}^2 \end{aligned} \quad (18)$$

También podemos aplicar la regla de recurrencia

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) - J'_{\nu}(x) \quad (19)$$

que si $\nu = m$ y $x = x_{nm}$ se reduce a

$$J_{m+1}(x_{nm}) = -J'_m(x_{nm}) \quad (20)$$

Esta fórmula se demuestra a) derivando la ecuación de Bessel para J_m para encontrar una expresión para J'''_m , y b) reemplazando la regla de recurrencia en la ecuación para J_{m+1} .

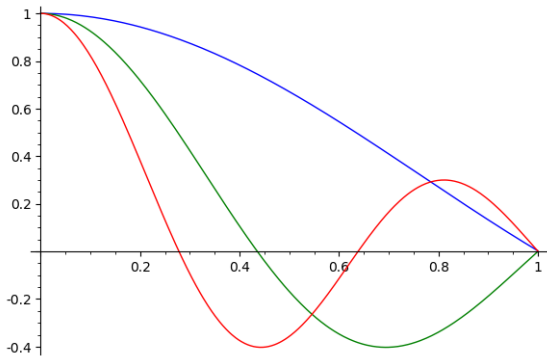


Figura: Las funciones $J_0(x_{n0}r/R)$. Azul: $n = 1$, verde: $n = 2$, rojo: $n = 3$.

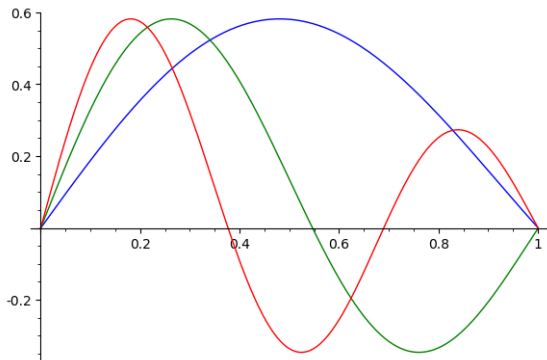


Figura: Las funciones $J_1(x_{n1}r/R)$. Azul: $n = 1$, verde: $n = 2$, rojo: $n = 3$.

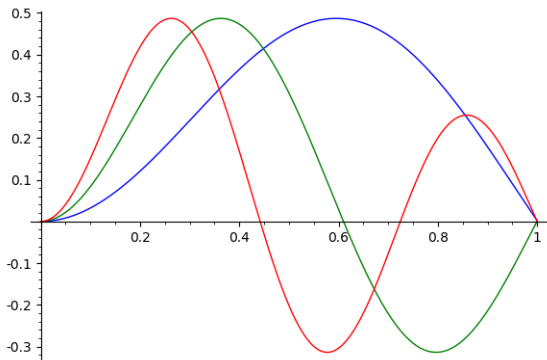


Figura: Las funciones $J_2(x_{n2}r/R)$. Azul: $n = 1$, verde: $n = 2$, rojo: $n = 3$.

Para terminar el problema, sólo falta desarrollar

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(z - z') \delta(\varphi - \varphi') \frac{\delta(r - r')}{r} \quad (21)$$

En nuestra base. Tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\varphi - \varphi' - 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi')} \quad (22)$$

$$\frac{\delta(r - r')}{r} = \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{nm}^2} J_m(x_{nm}r'/R) J_m(x_{nm}r/R) \quad (23)$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \phi(z, r, \varphi) \\ = & \frac{1}{2\pi R^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{nm}}{J_{nm}^2} e^{im(\varphi-\varphi')} J_m(x_{nm}r'/R) J_m(x_{nm}r/R) \\ & \sinh \left[\frac{x_{nm}}{R} \left(\frac{h}{2} - z \right) \right] \quad (z > z') \\ = & \frac{1}{2\pi R^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{nm}}{J_{nm}^2} e^{im(\varphi-\varphi')} J_m(x_{nm}r'/R) J_m(x_{nm}r/R) \\ & \sinh \left[\frac{x_{nm}}{R} \left(\frac{h}{2} + z \right) \right] \quad (z < z') \end{aligned} \quad (24)$$

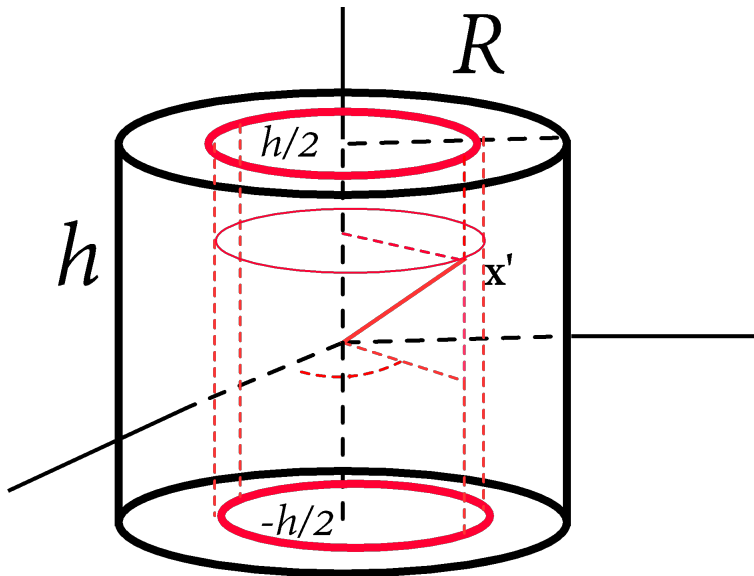
Las relaciones de soldadura son

$$\begin{aligned}
 A_{nm} \sinh \left[\frac{x_{nm}}{R} \left(\frac{h}{2} - z' \right) \right] - B_{nm} \sinh \left[\frac{x_{nm}}{R} \left(\frac{h}{2} + z' \right) \right] &= 0 \\
 A_{nm} \cosh \left[\frac{x_{nm}}{R} \left(\frac{h}{2} - z' \right) \right] + B_{nm} \cosh \left[\frac{x_{nm}}{R} \left(\frac{h}{2} + z' \right) \right] &= -\frac{R}{x_{nm}}
 \end{aligned} \tag{25}$$

y la solución

$$\begin{aligned}
 &\phi(z, r, \varphi) \\
 &= \frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_{nm}^2 x_{nm} \sinh \left[x_{nm} \frac{h}{R} \right]} e^{im(\varphi - \varphi')} \\
 &\quad J_m(x_{nm} r' / R) J_m(x_{nm} r / R) \\
 &\quad \sinh \left[\frac{x_{nm}}{R} \left(\frac{h}{2} - z_{>} \right) \right] \sinh \left[\frac{x_{nm}}{R} \left(\frac{h}{2} + z_{<} \right) \right] \tag{26}
 \end{aligned}$$

Estrategia II: Partimos la lata en dos a la distancia del punto fuente.



Ahora la región I será $r < r'$ y la región II será $r > r'$.

Probamos con una solución

$$F_{mk}^{I,II}(z, r, \varphi) = e^{im\varphi} e^{j2\pi kz/h} f_{mk}^{I,II}(r) \quad (27)$$

Pero cuando reemplazamos en la ecuación de Laplace la ecuación de Bessel sale al vesre

$$\frac{d^2}{dr^2} f_{mk}^{I,II}(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f_{mk}^{I,II} - \left[\left(\frac{2\pi k}{h} \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} \right] f_{mk}^{I,II} = 0 \quad (28)$$

Las soluciones de esta ecuación son funciones de Bessel de argumento imaginario, o *funciones de Bessel modificadas*.

En la región I descartamos las funciones de Neumann porque divergen en $r = 0$. Por lo tanto, la solución deberá expresarse en términos de la función

$$I_m \left(\frac{2\pi kr}{h} \right) \equiv i^{-m} J_m \left(\frac{2\pi ikr}{h} \right) \quad (29)$$

En la región II podemos usar las funciones de Hankel $H_m^{(1,2)}(ix)$. Cuando $x \gg m$,

$$H_m^{(1,2)}(ix) \propto \frac{1}{\sqrt{ix}} e^{\pm i(ix)} = \frac{1}{\sqrt{ix}} e^{\mp x} \quad (30)$$

Por lo tanto, si la lata abarca todo el plano ($R \rightarrow \infty$), descartamos las $H_m^{(2)}$. Es conveniente introducir una nueva función real

$$K_m(x) = \frac{\pi}{2} i^{m+1} H_m^{(1)}(ix) \quad (31)$$

I_m y K_m son independientes

$$rW[I_m, K_m] = -1 \quad (32)$$

**Qué pasa si la
lata se alarga?**



La posibilidad de desarrollar Fourier una función definida en el intervalo $[-h/2, h/2]$

$$f(z) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{2\pi i k z / h} \quad (33)$$

depende de la fórmula

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} dz e^{2\pi i (k-k') z / h} = \delta_{kk'} \quad (34)$$

ya que ésta implica que

$$f_k = \int_{-h/2}^{h/2} dz e^{-2\pi i k z / h} f(z) \quad (35)$$

Qué pasa si $h \rightarrow \infty$?

La ecuación (33) se puede pensar como que la señal f es reconstruída como una superposición de oscilaciones simples de número de onda $p = 2\pi k/h$ ($p = 2\pi/\lambda$). A medida que h crece, el espectro de la señal se hace cada vez más denso. Llega un momento en que más que superponer oscilaciones individuales, es mejor sumar primero aquéllas cuyo número de onda se encuentra en un pequeño intervalo dp .

Ahora, cuando pasamos de p a $p + dp$, k pasa a $k + hdp/2\pi$. Por lo tanto, hay $hdp/2\pi$ modos en el intervalo dp , y la fórmula (33) se convierte en

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{hdp}{2\pi} f(p) e^{ipz} \\ &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} f(p) e^{ipz} \end{aligned} \quad (36)$$

donde $f(p)$ se obtiene tomando el límite en la ecuación (35)

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ipz} f(z) \quad (37)$$

pero en qué se convierte la relación de ortogonalidad (34)?

Si $p' \neq p$ podemos tomar el límite directamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i(p-p')z} = 0 \quad (p' \neq p) \quad (38)$$

Pero si sumamos la ecuación (34) sobre cualquier rango de valores de k' que contenga a p , encontramos

$$\frac{1}{h} \sum_{k'_<}^{k'_>} \int_{-h/2}^{h/2} dz e^{2\pi i(k-k')z/h} = 1 \quad (k'_< < k < k'_>) \quad (39)$$

y si ahora tomamos el límite $h \rightarrow \infty$ en la ecuación (39) encontramos

$$\frac{1}{h} \int_{p_{<}}^{p_{>}} \frac{h dp'}{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} dz e^{i(p-p')z} = 1 \quad (p'_{<} < p < p'_{>}) \quad (40)$$

lo cual solo es posible si

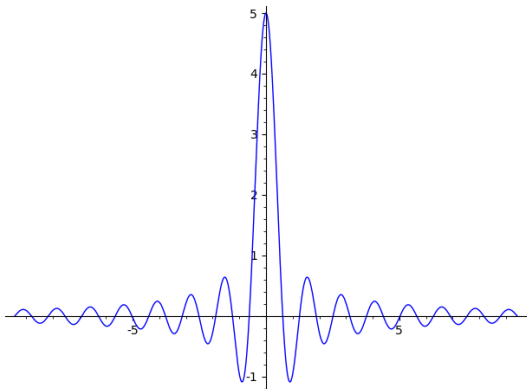
$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i(p-p')z} = 2\pi \delta(p - p') \quad (41)$$

Por otro lado, podemos calcular

$$\int_{-H}^H dz e^{i(p-p')z} = 2 \frac{\sin(H(p-p'))}{(p-p')} \quad (42)$$

o sea que hemos demostrado que

$$\frac{\sin(H(p-p'))}{(p-p')} \rightarrow \pi \delta(p-p') \quad (H \rightarrow \infty) \quad (43)$$



Este análisis nos va a ser útil para ver qué pasa cuando la lata se achata.



Como habíamos visto antes, cuando R es finito, existe un sistema de funciones ortogonales basado en las funciones $J_m(pr)$, donde los valores permitidos de p forman la secuencia $p_n = x_{nm}/R$. La condición de ortogonalidad se deduce de la regla general para problemas de Liouville

$$(\lambda' - \lambda) \int_a^b dx \rho f_{\lambda'}^* f_{\lambda} = \left\{ p \left[f_{\lambda'}^* \frac{df_{\lambda}}{dx} - f_{\lambda} \frac{df_{\lambda'}^*}{dx} \right] \right\} \Big|_a^b \quad (44)$$

traducido a nuestro caso resulta

$$\begin{aligned} & (p'^2 - p^2) \int_0^R r dr J_m(p'r) J_m(pr) \\ = & R [J_m(p'R) J'_m(pR) - J_m(pR) J'_m(p'R)] \end{aligned} \quad (45)$$

Como R es grande, podemos usar la fórmula asintótica

$$J_m(pR) = \sqrt{\frac{2}{\pi pR}} \cos[pR - \delta_m] \quad (46)$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^R r dr J_m(p'r) J_m(pr) \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{pp'}} \left[\frac{\sin(R(p-p'))}{(p-p')} - \frac{\sin(R(p+p') - 2\delta_m)}{(p+p')} \right] \quad (47) \end{aligned}$$

Como p y p' son ambos positivos, $p + p'$ no se anula nunca, y en el límite $R \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\infty} r dr J_m(p'r) J_m(pr) = \frac{1}{p} \delta(p - p') \quad (48)$$

Como en la transición de la serie a la integral de Fourier, obtenemos una representación integral para cualquier función de r

$$f(r) = \int_0^{\infty} p dp f_m(p) J_m(pr) \quad (49)$$

donde

$$f_m(p) = \int_0^{\infty} r dr J_m(pr) f(r) \quad (50)$$

En particular

$$\frac{1}{r} \delta(r - r') = \int_0^{\infty} p dp J_m(pr') J_m(pr) \quad (51)$$

La semana que viene comenzamos con el capítulo 4 del Jackson

