# MAGNETOESTATICA

## CAMPOS EN VACIO

Tomamos los siguientes principios como axiomas:

| | |
|---|---|
| Fuerza de Lorentz | $\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$ |
| No hay cargas magnéticas | $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ |
| Ley de Ampère | $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ |

Acerca de unidades

| | | |
|---|---|---|
| Carga | $Q$ | |
| Densidad de carga | $\rho$ | $QL^{-3}$ |
| Corriente | $I$ | $QT^{-1}$ |
| Densidad de Corriente | $\mathbf{j}$ | $QL^{-2}T^{-1}$ |
| Campo eléctrico | $\mathbf{E}$ | $QL^{-2}$ |
| Campo magnético | $\mathbf{B}$ | $QL^{-2}$ |

Se ve que las constantes $c$ en la fuerza de Lorentz y en la Ley de Ampère ambas tienen unidades de velocidad. La sorpresa es que coincidan entre sí y con la velocidad de la luz.

Acerca del símbolo de Levi-Civita

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{ijk} &= \epsilon^{jki} = -\epsilon^{ikj} \\
\epsilon^{ijk}\epsilon^{ilm} &= \delta^{jl}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{kl} \\
\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijm} &= 2\delta^{km} \\
(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^i &= \epsilon^{ijk}A_jB_k \\
(\nabla\times\mathbf{B})^i &= \epsilon^{ijk}\partial_jB_k \\
\int d^3x\,\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) &= \int d^3x\ (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} \\
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \mathbf{B}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

- La fuerza magnética sobre una partícula puntual no realiza trabajo, por lo tanto conserva la energía cinética.
- No hay fuerza en la dirección de **B**.
- Si el campo es homogéneo, la trayectoria de la partícula es un movimiento rectilíneo uniforme en la dirección de **B** y un movimiento circular uniforme en el plano perpendicular.

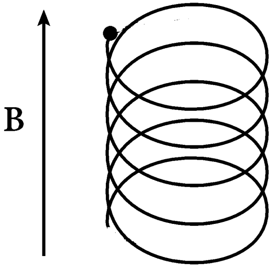



Figura: Fuerza de Lorentz

## POTENCIAL VECTOR

Como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, podemos escribir

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2}$$

y entonces la Ley de Ampère

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A}\right) - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{3}$$

**IMPORTANTE**:

$$\Delta \mathbf{A} = \Delta\left(A^i \hat{\mathbf{e}}_i\right) = \left(\Delta A^i\right)\hat{\mathbf{e}}_i \tag{4}$$

SOLO en coordenadas cartesianas.

**INVARIANCIA DE GAUGE Y GAUGE DE COULOMB**

La condición de que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ no determina $\mathbf{A}$ unívocamente. Dos campos $\mathbf{A}$ que difieran en un gradiente generan el mismo campo $\mathbf{B}$. La invarianza de la teoría ante la adición de un gradiente a $\mathbf{A}$ es la llamada *invariancia de gauge*.

Eso nos permite imponer una condición suplementaria sobre $\mathbf{A}$. Eso se llama *fijar el gauge*.

El *gauge de Coulomb* consiste en imponer la condición suplementaria $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Si cambiamos a $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \Delta f$. Entonces, o salimos del gauge de Coulomb, o $f$ es armónica, y con condiciones de contorno adecuadas eso significa que $f = 0$.

El sentido del gauge de Coulomb queda más claro si hacemos una transformación de Fourier

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\; \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \tag{5}$$

Entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\; \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \tag{6}$$

En el gauge de Coulomb, eliminamos el modo longitudinal de las amplitudes, dejando sólo dos amplitudes independientes para cada modo, ambas transversas.

**Ley de Biot y Savart**[1]

En el gauge de Coulomb

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{7}$$

que se integra inmediatamente

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \; \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{8}$$

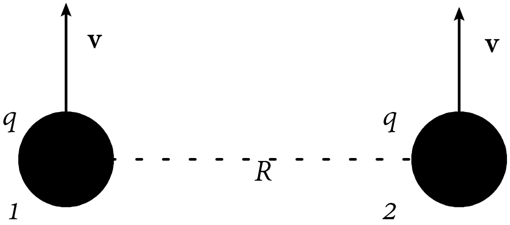
Por lo tanto

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \; \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \tag{9}$$

---

[1] A diferencia de Ortega y Gasset, Jean-Baptiste Biot (1774-1862) y Felix Savart (1791-1841) eran dos personas distintas.

Consideremos dos partículas idénticas $1, 2$, ambas de carga $q$, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$ perpendicular al radiovector de una a la otra, y a una distancia $R$. Si $v \ll c$, podemos ignorar los efectos de retardo y aplicar la ley anterior con $\mathbf{j} = q\mathbf{v}\delta\left(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1\right)$.



La fuerza magnética sobre la partícula 2 es[2]

$$\mathbf{F}_m = \frac{q^2}{c^2 R^3}\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) = -\frac{q^2 v^2}{c^2 R^3}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \qquad (10)$$

Al mismo tiempo, la repulsión electroestática entre las partículas es

$$\mathbf{F}_e = \frac{q^2}{R^3}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \qquad (11)$$

Por lo tanto

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{v^2}{c^2} \qquad (12)$$

[2] Aplicamos la regla “baca menos caballo”

# DESARROLLO MULTIPOLAR

La forma del potencial vector para una distribución localizada de corrientes nos permite desarrollar

$$
\begin{aligned}
A^k(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c}\int d^3x' \ \frac{j^k(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\
&= \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int d^3x' \ j'^k x'^{j_1}\dots x'^{j_n}\frac{\partial^n}{\partial x^{j_1}\dots\partial x^{j_n}}\frac{1}{r} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^k
\end{aligned}
\tag{13}
$$

En este caso hay simplificaciones adicionales porque una corriente estacionaria obedece $\nabla\mathbf{j}=0$

## NO HAY TERMINO MONOPOLAR

El término monopolar obedece

$$A_0^k = \frac{1}{c} \int d^3x' \; j'^k \frac{1}{r} \tag{14}$$

Pero

$$j^k = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[ j^j x^k \right] \tag{15}$$

Aplicando el teorema de Gauss y recordando que no hay corrientes en el infinito, obtenemos $\mathbf{A}_0 = 0$.

Esto es consistente con que no haya cargas magnéticas.

**EL TERMINO DIPOLAR**

El término dipolar es

$$A_1^k = \frac{1}{c}\int d^3x'\; j'^k x'^j \left(-\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{1}{r} \tag{16}$$

Ahora

$$j'^k x'^j + j'^j x'^k = \frac{\partial}{\partial x'^l}\left[j'^l x'^k x'^j\right] \tag{17}$$

de modo que

$$\begin{aligned} A_1^k &= \frac{1}{2c}\int d^3x'\;\left[j'^k x'^j - j'^j x'^k\right]\left(-\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{2c}\int d^3x'\;\epsilon^{lkj}\left(\mathbf{j}'\times\mathbf{x}'\right)_l\left(-\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{2c}\int d^3x'\;\left(\mathbf{j}'\times\mathbf{x}'\right)\times\nabla\frac{1}{r} \equiv \mathbf{m}\times\left(-\nabla\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

**m** es el *momento dipolar* de la distribución de corrientes.

**EJEMPLO**: Momento dipolar de una espira de corriente.

Una espira de corriente es un circuito cuya sección $A$ es muy chica frente a sus dimensiones lineales. Si el circuito transporta una corriente $I$, entonces la densidad de corriente $\mathbf{j} = (I/A)\,\mathbf{t}$ puede considerarse homogénea en una sección.

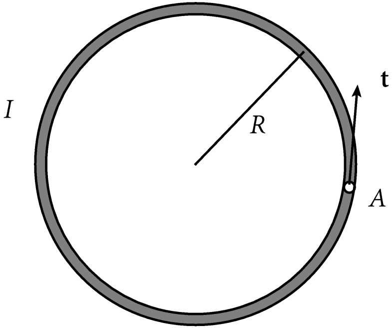



Figura: Espira de corriente

Descomponiendo la integral de volumen en la integral (trivial) sobre una sección y la integral a lo largo de la espira, el momento dipolar resulta

$$\begin{aligned} m^j &= \frac{-1}{2c}\int d^3x\ (\mathbf{j}\times\mathbf{x})^j \\ &= \frac{-I}{2c}\int\ dl\ \epsilon^{jkl}\hat{t}^k x^l \\ &= \frac{I}{2c}\int\ dl\ \hat{t}_k\epsilon^{kjl}x^l \end{aligned} \tag{19}$$

Esto se puede pensar como la circulación de un "vector" $u^k = \epsilon^{kjl} x^l$. Aplicando el Teorema de Stokes

$$
\begin{aligned}
m^j &= \frac{I}{2c} \int dS_p \, \epsilon^{pqk} \partial_q \epsilon^{kjl} x^l \\
&= \frac{I}{2c} \int dS_p \, \epsilon^{pqk} \epsilon^{jqk} = \frac{I}{c} \int dS^j
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Si la espira es plana, $\mathbf{m} = (IS/c)\ \mathbf{n}$.

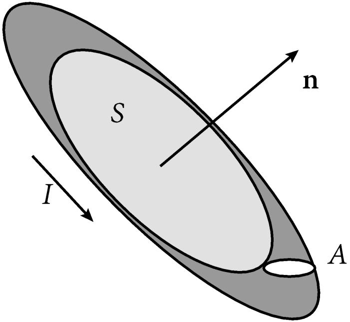



Figura: Momento dipolar de una espira de corriente

En el caso en que la espira es en realidad la órbita (circular) de una partícula de masa $\mu$, carga $q$ y velocidad angular $\omega$, tenemos $I = q/T = q\omega/2\pi$, $S = \pi R^2$, de modo que

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2c} R^2 \omega \, \mathbf{n} = \frac{q}{2\mu c} \mathbf{L} \tag{21}$$

donde **L** es el momento angular.

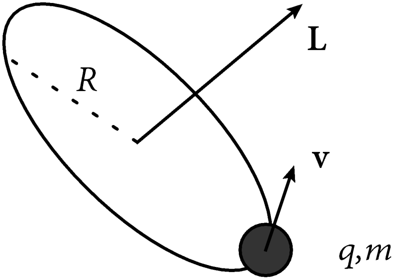



Figura: Momento dipolar de una espira de corriente

## DENSIDAD DE MOMENTO DIPOLAR

Como $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, siempre podemos escribir

$$\frac{1}{c}\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{M} \tag{22}$$

y entonces

$$\begin{aligned} m^j &= \frac{-1}{2c}\int d^3x\ \epsilon^{jkl} j^k x^l \\ &= \frac{-1}{2}\int d^3x\ \epsilon^{jkl}\epsilon^{kpq}\partial_p M^q\ x^l \\ &= \frac{1}{2}\int d^3x\ \epsilon^{jkl}\epsilon^{klq} M^q \\ &= \int d^3x\ M^j \end{aligned} \tag{23}$$

**M** es la *densidad* de momento dipolar. Como **m** tiene unidades de $QL$, **M** tiene unidades de $QL^{-2}$, igual que **B** y **E.**

## MEDIOS MAGNETICOS

Un medio magnético reacciona a un campo magnético aplicado desarrollando una densidad de corriente *inducida* $\mathbf{j}_I$, que a su vez se puede expresar en términos de la *magnetización* $\mathbf{M}$ como $\mathbf{j}_I = c\nabla \times \mathbf{M}$. Discriminando las componentes libre e inducida de la densidad de corriente total $\mathbf{j}_T = \mathbf{j} + \mathbf{j}_I$, la Ley de Ampère queda

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + 4\pi\nabla \times \mathbf{M} \tag{24}$$

Introducimos el *campo magnético* $\mathbf{H}$ escribiendo $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$. Las leyes de Maxwell quedan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{aligned} \tag{25}$$

Para cerrar el sistema es necesario introducir *relaciones constitutivas*. En un medio lineal e isótropo, $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ y por lo tanto $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, donde $\mu = 1 + 4\pi\chi_m$. Si $\chi_m > 0$ decimos que el medio es *paramagnético*, si $\chi_m < 0$ el medio es *diamagnético*. En un medio *ferromagnético* la relación entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{H}$ es no lineal. Un medio ferromagnético puede soportar $\mathbf{M} \neq 0$ aún en ausencia de campo aplicado.

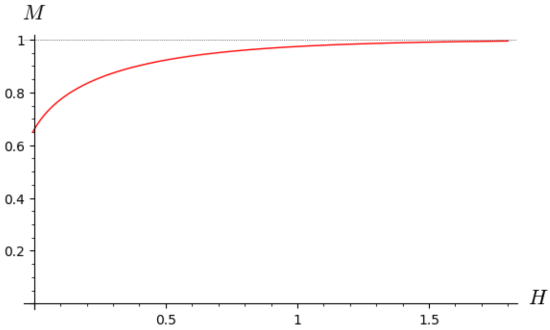
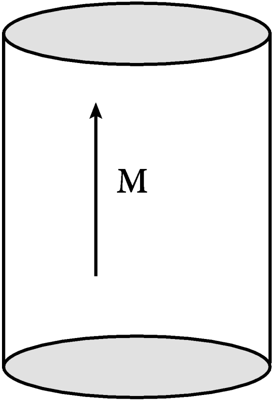



Figura: Relación $\mathbf{M} - \mathbf{H}$ típica de un material ferromagnético




El equivalente magnético del capacitor plano es un cilindro con magnetización **M** constante paralela al eje del cilindro. Las ecuaciones son

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{H} &= -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

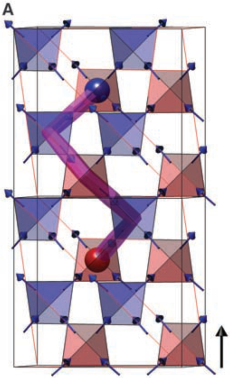
con la "carga" $-\nabla \cdot \mathbf{M}$ concentrada en las tapas del cilindro.

Si el cilindro es largo y delgado, las tapas se comportan como monopolos magnéticos.

# Dirac Strings and Magnetic Monopoles in the Spin Ice $Dy_2Ti_2O_7$

D. J. P. Morris,[1]* D. A. Tennant,[1,2]* S. A. Grigera,[3,4]* B. Klemke,[1,2] C. Castelnovo,[5] R. Moessner,[6] C. Czternasty,[1] M. Meissner,[1] K. C. Rule,[1] J.-U. Hoffmann,[1] K. Kiefer,[1] S. Gerischer,[1] D. Slobinsky,[3] R. S. Perry[7]

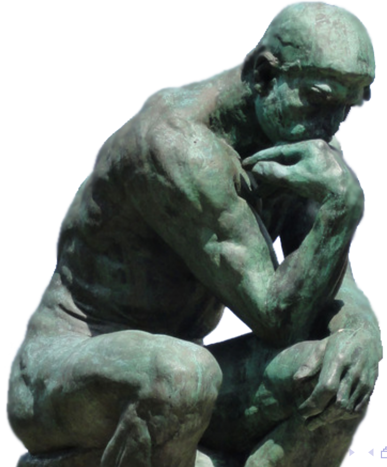
Sources of magnetic fields—magnetic monopoles—have so far proven elusive as elementary particles. Condensed-matter physicists have recently proposed several scenarios of emergent quasiparticles resembling monopoles. A particularly simple proposition pertains to spin ice on the highly frustrated pyrochlore lattice. The spin-ice state is argued to be well described by networks of aligned dipoles resembling solenoidal tubes—classical, and observable, versions of a Dirac string. Where these tubes end, the resulting defects look like magnetic monopoles. We demonstrated, by diffuse neutron scattering, the presence of such strings in the spin ice dysprosium titanate ($Dy_2Ti_2O_7$). This is achieved by applying a symmetry-breaking magnetic field with which we can manipulate the density and orientation of the strings. In turn, heat capacity is described by a gas of magnetic monopoles interacting via a magnetic Coulomb interaction.




www.sciencemag.org SCIENCE VOL 326 16 OCTOBER 2009

# ENERGIA Y ENERGIA LIBRE DE UN CAMPO MAGNETICO

Si el campo magnético no realiza trabajo sobre las cargas, porqué una distribución de corrientes bajo un campo magnético adquiere una energía magnética?



Un campo magnético variable induce un campo eléctrico, que *sí* realiza trabajo sobre las cargas. En un intervalo $dt$, la energía cambia en

$$
\begin{aligned}
dU &= (-dt)\int d^3x\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{j} \\
&= \frac{(-cdt)}{4\pi}\int d^3x\,\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) \\
&= \frac{(-cdt)}{4\pi}\int d^3x\,\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{H} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int d^3x\,\left(dt\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{H}
\end{aligned}
\qquad (27)
$$

e integrando sobre todo el intervalo

$$dU = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \, \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \tag{28}$$

que para un medio lineal puede integrarse

$$U = U_0 + \frac{1}{8\pi} \int d^3x \, \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \tag{29}$$

Usando que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ encontramos la forma equivalente

$$U = U_0 + \frac{1}{2c} \int d^3x \, \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \tag{30}$$

Si trabajamos a temperatura constante, las mismas relaciones valen para la energía libre $F$

$$
\begin{aligned}
F &= F_0 + \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \\
&= F_0 + \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \frac{B^2}{\mu}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

La estabilidad termodinámica requiere $\mu > 0$.

Si queremos usar **H** como variable independiente hacemos una transformación de Legendre

$$
\begin{aligned}
\tilde{F} &= F - \frac{1}{4\pi}\int d^3x\, \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \\
&= F_0 - \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \\
&= F_0 - \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \mu H^2 \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Ante un cambio en la permeabilidad

$$
d\tilde{F} = \frac{-1}{4\pi}\int d^3x\, \mathbf{B}\cdot d\mathbf{H} - \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, H^2 d\mu \qquad (33)
$$

El primer término se anula porque $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ y $\nabla\times d\mathbf{H} = 0$. Sin embargo, no es posible afirmar que $d\tilde{F}$ tenga un signo definido.

Por último, queremos ver el cambio en la energía libre $\tilde{F}$ con y sin un medio magnético

$$
\begin{aligned}
d\tilde{F} - d\tilde{F}' &= \frac{-1}{4\pi} \int d^3x \ \left[\mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} - \mathbf{H}' \cdot d\mathbf{H}'\right] \\
&= -\int d^3x \, \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}'
\end{aligned} \tag{34}
$$

En un sistema lineal, podemos integrar

$$
\tilde{F} - \tilde{F}' = \frac{-1}{2} \int d^3x \, \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} \tag{35}
$$

Para demostrar la ecuación (34), observamos que

$$
\begin{aligned}
d\tilde{F} - d\tilde{F}' &= -\int d^3x \, \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}' \\
- \quad & \frac{1}{4\pi} \int d^3x \, \left[\mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} - \mathbf{H}' \cdot d\mathbf{H}' - (\mathbf{B} - \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{H}'\right] \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Reorganizamos la segunda línea como

$$
\begin{aligned}
& \frac{-1}{4\pi} \int d^3x \, \left[\mathbf{B} \cdot \left(d\mathbf{H} - d\mathbf{H}'\right) - \left(\mathbf{H}' - \mathbf{H}\right) \cdot d\mathbf{H}'\right] \\
= \quad & \frac{-1}{4\pi} \int d^3x \, \left[\nabla \times \mathbf{A} \cdot \left(d\mathbf{H} - d\mathbf{H}'\right) - \left(\mathbf{H}' - \mathbf{H}\right) \cdot \nabla \times d\mathbf{A}'\right] \\
& \qquad (37)
\end{aligned}
$$

que se anula porque

$$
\nabla \times \left(d\mathbf{H} - d\mathbf{H}'\right) = \nabla \times \left(\mathbf{H}' - \mathbf{H}\right) = 0 \qquad (38)
$$

La clase que viene empezamos con las ecuaciones de Maxwell.