1 Las frecuencias propias del oscilador amortiguado

Queremos resolver

$$\lambda^3 - \frac{m}{\Gamma}\left[\lambda^2 + \omega_0^2\right] = 0 \tag{1}$$

Primero tenemos que eliminar el término cuadrático. Para eso desplazamos

$$\lambda = X + \frac{m}{3\Gamma} \tag{2}$$

y queda

$$X^3 - 3\left(\frac{m}{3\Gamma}\right)^2 X - 2\left[\frac{m\omega_0^2}{2\Gamma} + \left(\frac{m}{3\Gamma}\right)^3\right] = 0 \tag{3}$$

Vamos a definir

$$\frac{m\omega_0^2}{2\Gamma} + \left(\frac{m}{3\Gamma}\right)^3 = \left(\frac{m}{3\Gamma}\right)^3 \cosh 3\chi \tag{4}$$

Entonces

$$X = \frac{m}{3\Gamma} x \tag{5}$$

$$x^3 - 3x - 2\cosh 3\chi = 0 \tag{6}$$

Ahora definimos

$$x = y + \frac{1}{y} \tag{7}$$

entonces

$$y^3 + \frac{1}{y^3} - 2\cosh 3\chi = 0 \tag{8}$$

cuyas soluciones son

$$y_\pm^3 = e^{\pm 3\chi} \tag{9}$$

Tomando la raíz cúbica obtenemos seis soluciones (no todas van a dar soluciones independientes del problema original)

$$y_{n\pm} = e^{\pm(\chi + 2\pi i (n/3))} \tag{10}$$

$n = 0, 1, 2$. Ahora sólo es cuestión de reemplazar.

2 El problema con λ_0

Queremos resolver

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - \Gamma\frac{d^3x}{dt^3} + m\omega_0^2 x = m\omega_0^2 \theta\left(t\right) \tag{11}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x &= A_0 e^{\lambda_0 t} + A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}; \quad t < 0 \\ x &= 1 + A_0' e^{\lambda_0 t} + A_+' e^{\lambda_+ t} + A_-' e^{\lambda_- t}; \quad t > 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Las condiciones de ligadura son la continuidad de x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ en $t = 0$, de donde

$$\begin{aligned} \left(A - A'\right)_0 + \left(A - A'\right)_+ + \left(A - A'\right)_- &= 1 \\ \lambda_0\left(A - A'\right)_0 + \lambda_+\left(A - A'\right)_+ + \lambda_-\left(A - A'\right)_- &= 0 \\ \lambda_0^2\left(A - A'\right)_0 + \lambda_+^2\left(A - A'\right)_+ + \lambda_-^2\left(A - A'\right)_- &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

El determinante de este sistema es

$$\left(\lambda_+ - \lambda_-\right)\left(\lambda_- - \lambda_0\right)\left(\lambda_0 - \lambda_+\right) \tag{14}$$

y por lo tanto

$$(A - A')_0 = \frac{\lambda_+ \lambda_-}{(\lambda_0 - \lambda_+)(\lambda_0 - \lambda_-)} \tag{15}$$

que no puede ser cero.

Similarmente

$$\begin{aligned}
(A - A')_+ &= \frac{\lambda_0 \lambda_-}{(\lambda_0 - \lambda_+)(\lambda_+ - \lambda_-)} \\
(A - A')_- &= \frac{\lambda_0 \lambda_+}{(\lambda_0 - \lambda_-)(\lambda_- - \lambda_+)}
\end{aligned} \tag{16}$$

La solución con condiciones de contorno causales, $A_0 = A_+ = A_- = 0$, con $\lambda_\pm = \pm i\omega - \lambda$, $\lambda_0 = 3 + 2\lambda$ $(m/3\Gamma = 1)$ es

$$x(t) = 1 - \frac{1}{\left[9(1+\lambda)^2 + \omega^2\right]} \left\{ \left(\lambda^2 + \omega^2\right) e^{(3+2\lambda)t} + (3 + 2\lambda) e^{-\lambda t} \left[(3 + 4\lambda) \cos\omega t + \left(3\lambda (1 + \lambda) - \omega^2\right) \frac{\sin \omega t}{\omega} \right] \right\} \tag{17}$$

Si forzamos el sistema a ser estable $A'_0 = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{\left(\lambda^2 + \omega^2\right)}{\left[9(1+\lambda)^2 + \omega^2\right]} e^{(3+2\lambda)t}; \quad (t < 0) \\
x(t) &= 1 - \frac{(3 + 2\lambda) e^{-\lambda t}}{\left[9(1+\lambda)^2 + \omega^2\right]} \left[(3 + 4\lambda) \cos\omega t + \left(3\lambda (1 + \lambda) - \omega^2\right) \frac{\sin \omega t}{\omega} \right]; \ (t > 0)
\end{aligned} \tag{18}$$

3 Reacción de radiación

Empezamos desde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \mathbf{\Delta}\phi &= 4\pi\rho \\
\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mathbf{\Delta}\mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}
\end{aligned} \tag{19}$$

En el gauge de Lorenz

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{20}$$

Suponemos una distribución de carga rígida

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \tag{21}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t))} \rho_{\mathbf{k}} \\
&\approx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[1 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(t)\right] \rho_{\mathbf{k}} \\
&= \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t} \left[2\pi\delta(\omega) - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(\omega)\right] \rho_{\mathbf{k}}
\end{aligned} \tag{22}$$

Con la misma aproximación

$$\begin{aligned}
\mathbf{j} &= \dot{\mathbf{X}}\, \rho(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \\
&\approx \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t} (-i)\, \omega \mathbf{X}(\omega)\, \rho_{\mathbf{k}}
\end{aligned} \tag{23}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\left[k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right]\phi_{\mathbf{k}}\left(\omega\right) &= 4\pi\left[2\pi\delta\left(\omega\right)-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}\left(\omega\right)\right]\rho_{\mathbf{k}} \\ \left[k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right]\mathbf{A}_{\mathbf{k}}\left(\omega\right) &= -\frac{4\pi}{c}i\omega\mathbf{X}\left(\omega\right)\rho_{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{24}$$

Vamos a despreciar la fuerza magnética, y el campo eléctrico

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbf{k}}\left(\omega\right) &= -i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}}\left(\omega\right)+i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}\left(\omega\right) \\ &= \left(-4\pi\right)\frac{\left[-ic^2\mathbf{k}\left[2\pi\delta\left(\omega\right)-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}\left(\omega\right)\right]+\omega^2\mathbf{X}\left(\omega\right)\right]}{\left[\left(\omega+i\epsilon\right)^2-c^2k^2\right]}\rho_{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{25}$$

La fuerza total sobre la distribución de carga

$$\mathbf{F}\left(t\right)=\int d^3x\;\rho\left(\mathbf{x},t\right)\mathbf{E}\left(\mathbf{x},t\right) \tag{26}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\left(\omega\right) &= \int\frac{d^3kd\omega'}{\left(2\pi\right)^4}\;\rho^*_{\mathbf{k}}\left(\omega'\right)\mathbf{E}_{\mathbf{k}}\left(\omega-\omega'\right) \\ &\approx \left(-4\pi\right)\int\frac{d^3kd\omega'}{\left(2\pi\right)^4}\;\frac{\left|\rho_{\mathbf{k}}\right|^2}{\left[\left(\omega-\omega'+i\epsilon\right)^2-c^2k^2\right]}\left\{2\pi\delta\left(\omega'\right)\left[-ic^2\mathbf{k}\left[2\pi\delta\left(\omega-\omega'\right)\right.\right.\right. \\ &- \left.\left.\left. i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}\left(\omega-\omega'\right)\right]+\left(\omega-\omega'\right)^2\mathbf{X}\left(\omega-\omega'\right)\right]+\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}\right)\left(\omega'\right)c^2\mathbf{k}2\pi\delta\left(\omega-\omega'\right)\right\}\end{aligned} \tag{27}$$

El término que es independiente de $\mathbf{X}$ o se anula o es compensado por fuerzas no electromagnéticas; si $\rho_{\mathbf{k}}$ tiene simetría esférica ocurre lo primero. En los otros términos podemos integrar sobre ω'

$$\mathbf{F}\left(\omega\right)=\left(-4\pi\right)\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\left|\rho_{\mathbf{k}}\right|^2\left\{\frac{\left[-c^2\mathbf{k}\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}\left(\omega\right)\right]+\omega^2\mathbf{X}\left(\omega\right)\right]}{\left[\left(\omega+i\epsilon\right)^2-c^2k^2\right]}+\frac{\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}\right)\left(\omega\right)c^2\mathbf{k}}{\left[\left(i\epsilon\right)^2-c^2k^2\right]}\right\} \tag{28}$$

Usando nuevamente la simetría esférica

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\left(\omega\right) &= \left(-4\pi\right)\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\left|\rho_{\mathbf{k}}\right|^2\left\{\frac{\left[-\frac{1}{3}c^2k^2+\omega^2\right]}{\left[\left(\omega+i\epsilon\right)^2-c^2k^2\right]}-\frac{1}{3}\right\}\mathbf{X}\left(\omega\right) \\ &= \left(-\frac{8\pi}{3}\right)\omega^2\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\frac{\left|\rho_{\mathbf{k}}\right|^2}{\left[\left(\omega+i\epsilon\right)^2-c^2k^2\right]}\mathbf{X}\left(\omega\right)\end{aligned} \tag{29}$$

Para poder avanzar más, necesitamos decir algo sobre $\rho_{\mathbf{k}}$. Un modelo que es analíticamente tratable es una capa esférica de radio R y carga total e. Entonces

$$\begin{aligned}\rho\left(\mathbf{x}\right) &= \frac{e}{4\pi R^2}\delta\left(r-R\right) \\ \rho_{\mathbf{k}} &= \int d^3x\;e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\rho\left(\mathbf{x}\right) \\ &= \frac{e}{2}\int_0^\pi d\theta\;\sin\theta\;e^{-ikR\cos\theta} \\ &= e\frac{\sin kR}{kR}\end{aligned} \tag{30}$$

Entonces, si $\mathbf{F}\left(\omega\right)=\Lambda\left(\omega\right)\mathbf{X}\left(\omega\right)$

$$\Lambda(\omega)=\left(\frac{4e^2}{3\pi c^2 R^2}\right)\omega^2\int_0^\infty dk\;\frac{\sin^2 kR}{\left[k^2-(\omega+i\epsilon)^2/c^2\right]} \tag{31}$$

Ahora

$$\sin^2 kR=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2kR\right) \tag{32}$$

$$\Lambda(\omega)=\left(\frac{e^2}{\pi c^2 R^2}\right)\omega^2\int_{-\infty}^\infty dk\;\frac{(1-\cos 2kR)}{\left[k^2-(\omega+i\epsilon)^2/c^2\right]} \tag{33}$$

El integrando tiene polos en $k=\pm(\omega+i\epsilon)/c$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty dk\;\frac{e^{2ikR}}{\left[k^2-(\omega+i\epsilon)^2/c^2\right]} &= \frac{i\pi c}{\omega}e^{2i\omega R/c}\\
\int_{-\infty}^\infty dk\;\frac{e^{-2ikR}}{\left[k^2-(\omega+i\epsilon)^2/c^2\right]} &= \frac{i\pi c}{\omega}e^{2i\omega R/c}\\
\int_{-\infty}^\infty dk\;\frac{1}{\left[k^2-(\omega+i\epsilon)^2/c^2\right]} &= \frac{i\pi c}{\omega}
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\Lambda(\omega)=\left(\frac{ie^2}{3cR^2}\right)\omega\left(1-e^{2i\omega R/c}\right) \tag{35}$$

Esta fórmula ha sido calculada asumiendo que ω es real. Sin embargo, vamos a suponer que sigue valiendo para $\omega=(c/2R)(\xi+i\eta)$ complejo.

Además tenemos una complicación. La ecuación de movimiento está quedando como

$$\left[m_D\omega^2+\Lambda(\omega)\right]\mathbf{X}(\omega)=0 \tag{36}$$

La masa de la partícula se define por la condición de que, cuando $\omega\to 0$, la ecuación de movimiento es

$$m\omega^2\mathbf{X}(\omega)=0 \tag{37}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
m_D &= m-\lim_{\omega\to 0}\frac{\Lambda(\omega)}{\omega^2}\\
&= m-\frac{2e^2}{3c^2R}
\end{aligned} \tag{38}$$

La ecuación de movimiento ahora es

$$m\omega^2\left[1+\vartheta\left[\frac{ic}{2R\omega}\left(1-e^{2i\omega R/c}\right)-1\right]\right]\mathbf{X}(\omega)=0 \tag{39}$$

donde

$$\vartheta=\frac{2e^2}{3mc^2R}=\frac{2}{3}\frac{r_{cl}}{R} \tag{40}$$

$r_{cl}=e^2/mc^2$ es el radio clásico de la partícula. Las soluciones para la partícula libre serían $\omega=0$ o

$$0=(1-\vartheta)(\xi+i\eta)+i\vartheta\left(1-e^{i\xi-\eta}\right) \tag{41}$$

Separando partes real e imaginaria

$$\begin{aligned}
0 &= (1-\vartheta)\,\xi+e^{-\eta}\vartheta\sin\xi\\
0 &= (1-\vartheta)\,\eta+\vartheta\left(1-e^{-\eta}\cos\xi\right)
\end{aligned} \tag{42}$$

Se ve que sólo puede haber raíces con $\eta > 0$ si $\vartheta > 1$, o sea $R < 2r_{cl}/3$. Por otro lado, si desarrollamos la ecuación de movimiento en potencias de $R\omega/c$, el primer orden no trivial es

$$m\left[\omega^2 - \vartheta\left[\frac{ic}{2R}\omega\frac{1}{2}\left(2i\omega R/c\right)^2\right]\right]\mathbf{X}\left(\omega\right) = 0 \tag{43}$$

que reproduce el término de Abraham $-$ Lorentz.