FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2020

PRÁCTICA DEL 31/08:
GUÍA 1 - TRANSFORMACIONES Y SIMETRÍAS. REPASO DE LA LEY DE GAUSS

Objetivos de hoy:

- Abordar $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ desde las ecuaciones de Maxwell: campos con fuentes en divergencia y rotor.
- Repasar (y formalizar) transformaciones de las fuentes y de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$.
- Operar con notación tensorial de índices (aplicado a las transformaciones).
- Aplicar transformaciones de simetría e inferir propiedades del sistema.
- Resolver problemas de electrostática usando la ley de Gauss.

Ecuaciones de Maxwell (unidades: CGS Gaussiano)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\
\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}
\end{aligned}$$

Ecuaciones de Maxwell estáticas (en vacío):

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\
\nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\
\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}
\end{aligned}$$

<u>Observaciones</u>:

(i) Quedan desacopladas: un problema para $\mathbf{E}$ y otro para $\mathbf{B}$.

(ii) $\mathbf{E}$ tiene fuentes en su divergencia: ρ, densidad volumétrica de carga (es una densidad escalar). La Carga eléctrica total de un sistema es

$$Q = \int dq = \int \rho(\mathbf{r})\; d^3r$$

(iii) $\mathbf{B}$ tiene fuentes en su rotor: $\mathbf{j}$, densidad de corriente (es una densidad vectorial).

(Repaso de divergencia y rotor: ver material adicional en la página web [link: Operadores diferenciales.])

Teorema de Helmholtz (campos de gradientes y rotores):

Dado el campo vectorial suave $\mathbf{W}(\mathbf{r})$, tal que $\mathbf{W}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r\to\infty} 0$, y con

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}) &= D(\mathbf{r}) & &: \text{fuente en divergencia} \\ \nabla \times \mathbf{W}(\mathbf{r}) &= \mathbf{C}(\mathbf{r}) & &: \text{fuente en rotor} \end{aligned}$$

se puede descomponer unívocamente, como:

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \underbrace{\mathbf{V}(\mathbf{r})}_{\textbf{irrotaiconal}} + \underbrace{\mathbf{U}(\mathbf{r})}_{\textbf{solenoidal}} \quad / \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= 0 \\ \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad / \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r$$

y

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad / \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r$$

Observaciones:

(i) Por consistencia debe ser $\nabla \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0}$.

(ii) Las hipótesis generales exigen que las fuentes decaigan a cero como: $(\mathbf{D}, \mathbf{C}) \xrightarrow{r\to\infty} 1/r^{\epsilon}$, con $\epsilon > 2$.

(iii) Para garantizar la unicidad de una solución que posee alguna patología, por ejemplo el comportamiento en infinito (o de sus fuentes), hay que apelar a algún otro método.

(iv) No existe una función no trivial con divergencia y rotor nulos y que tienda a cero en infinito (la única solución es la nula).

Transformaciones de las fuentes

Por lo general, en un problema de electrostática o de magnetostática, se presenta una configuración de cargas o de corrientes eléctricas a partir de las cuales se pide calcular los campos; $\mathbf{E}$, o $\mathbf{B}$. Para eso, en cursos anteriores como Física 3, hemos usado la ley de Gauss,

$$\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \int \rho(\mathbf{r}) d^3 r \,,$$

o la ley de Ampère,

$$\oint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \,,$$

que son las versiones integrales de las ecuaciones de Maxwell. Las fórmulas de arriba son válidas (en vacío) en cualquier circunstancia, pero en general no sirven para calcular los campos en cada punto del espacio sino que, mediante la integral, dan un promedio. Sin embargo, en configuraciones particulares, pueden usarse eficientemente para calcular los campos: Por ejemplo, si $\mathbf{E}$ toma el mismo valor en toda una superficie cerrada, la ley de Gauss (nos da el promedio) sirve para calcular el campo en cualquier punto de la superficie. Para poder aplicarlo de esta manera es necesario tener en cuenta consideraciones de simetría de la configuración, de tal manera de poder eliminar componentes de los campos, y determinar su dependencia funcional con las coordenadas espaciales. En el esquema habitual de estos ejercicios, se nos indica cuáles son las fuentes (ρ y/o $\mathbf{j}$), deducimos qué simetrías presentan y partir de allí inferimos algunas propiedades de los campos ($\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$) para finalmente aplicar la ley de Gauss o la ley de Ampère. En este sentido, cuando hablamos de simetrías de una configuración nos referimos a transformaciones que dejen invariante las fuentes del problema y por consiguiente las propiedades físicas del sistema en estudio.

Antes de profundizar en esa estrategia, vamos a repasar algunas de las transformaciones que solemos usar para resolver los problemas estáticos (que también aplican en situaciones dinámicas). Las transformaciones nos serán útiles para trabajar a lo largo de todo el curso para inferir propiedades de un sistema y, principalmente, para simplificar la resolución e interpretación mediante las simetrías que las configuraciones de cargas y/o corrientes presenten. Las transformaciones que mas usaremos son:

- Traslaciones
- Rotaciones
- Reflexiones
- Cambio de signo
- Cambios de escala

<u>Definiciones</u>.
Usaremos principalmente traslaciones, rotaciones y reflexiones. Vamos a trabajar esencialmente con vectores y escalares que son objetos bien definidos ante estas transformaciones . En particular, las fuentes son densidades escalares (en el caso de ρ) o vectoriales (en el caso de $\mathbf{j}$). A continuación repasamos definiciones de algunas transformaciones y cómo se aplican sobre ρ y $\mathbf{j}$.

Traslación: $T(\mathbf{a})$. Dado un vector $\mathbf{a}$, las fuentes trasladadas mediante $T(\mathbf{a})$ son,

$$\rho(\mathbf{r}) \to \rho'(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r} - \mathbf{a})$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \to \mathbf{j}'(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{a})$$

[Observación: la traslación rígida sólo afecta las coordenadas (punto de observación) de las fuentes].

Rotación: $\mathbf{R}$. Definimos rotaciones alrededor de un eje que pasa por el origen a partir de operadores (matrices) que transforman vectores $\mathbf{r}$ de la siguiente manera

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r}$$

Ejemplo: En coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{R} = \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{rotación en } \gamma \text{ entorno al eje z}}, \qquad \begin{aligned} \mathbf{r} \; &= (x, y, z)^t &&= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ & &&= \rho\hat{\rho}(\varphi) + z\hat{z} \\ \mathbf{r}' \; &= \quad \mathbf{R}\mathbf{r} &&= (x\cos\gamma - y\sin\gamma)\hat{x} + (y\cos\gamma + x\sin\gamma)\hat{y} + z\hat{z} \\ & &&= \rho\,\hat{\rho}(\varphi + \gamma) + z\hat{z} \end{aligned}$$

Con notación de índices tensoriales ($i = 1, 2, 3$),

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) : \quad r_i$$

$$\mathbf{R} : \quad R_{ij} \quad \text{(componentes de la matriz),}$$

$$\Longrightarrow r'_i = [\mathbf{R}\mathbf{r}]_i = R_{ij} r_j \qquad \text{(suma de índices repetidos)}$$

propiedades:

- Ortogonal: $\mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathbf{t}} = \mathbf{R}^{\mathbf{t}}\mathbf{R} = \mathbf{1}$ (la traspuesta es la inversa)

$$\left[\mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathbf{t}}\right]_{ij} = R_{ik}[\mathbf{R}^t]_{kj} = R_{ik}R_{jk} = \delta_{ij}$$

  donde,

$$\text{Delta de Kronecker: } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- Determinante: det $\mathbf{R} = +1$

- isométrica: $|\mathbf{R}\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|$ (preserva la distancia al origen).

Entonces, decimos que las fuentes rotadas mediante $\mathbf{R}$ son:

$\rho'(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})$: carga original en punto anti transformado (con la inversa)

$\mathbf{j}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\,\mathbf{j}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})$: rotación de la corriente original en punto anti transformado

[Observación: La rotación es rígida para las densidades. Como $\mathbf{j}$ es un vector, además de considerar la transformación sobre el argumento, sus componentes transforman como tal.]

Lo anterior resulta muy intuitivo. De todas formas, veamos con mas cuidado de donde sale y qué estamos usando para llegar a esas transformaciones. Las densidades vienen definidas a partir de una pequeña porción de carga dq en un volumen infinitesimal dV,

$$dq|_{dV} = \rho(\mathbf{r})\, d^3r\,.$$

En el lado derecha usamos $dV \equiv d^3r$ para hacer referencia a las mismas coordenadas del vector $\mathbf{r}$, que aparece en el argumento de la densidad $\rho(\mathbf{r})$. Pensamos en transformaciones geométricas que preservan las cargas infinitesimales, esto es: cambian posiciones y volúmenes pero la carga se conserva.

$$dq \to dq'|_{dV'} = dq|_{dV}$$

Para la carga podemos escribir, entonces,

$$dq'|_{dV'} = \rho'(\mathbf{r}')\, d^3r'$$

Usando $\mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r}$, y que el elemento de volumen transforma con el Jacobiano, $d^3r' = J_R d^3r$, de lo de arriba tenemos que

$$\rho'(\mathbf{R}\mathbf{r})\, J_R d^3r = \rho(\mathbf{r})\, d^3r,$$

Finalmente despejando y renombrando el punto de de observación, obtenemos

$$\rho'(\mathbf{r}) \;=\frac{\rho(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})}{J_R}\,.$$

Hagamos lo mismo para la densidad de corriente a partir de

$$\mathbf{v}\, dq|_{dV} = \mathbf{j}(\mathbf{r})\, d^3r\,, \qquad \mathbf{v}'\, dq'|_{dV'} = \mathbf{j}'(\mathbf{r}')\, d^3r' = \mathbf{j}'(\mathbf{R}\mathbf{r})\, J_R d^3r$$

La velocidad $\mathbf{v}$ de la porción de carga aporta el carácter vectorial, entonces ahora tenemos que

$$\mathbf{v}dq \to \mathbf{v}'dq'|_{dV'} = \mathbf{R}\mathbf{v}\, dq|_{dV}$$

Despejando y nombrando el punto de observación, obtenemos

$$\mathbf{j}'(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{R}\mathbf{j}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})}{J_R}\,.$$

Por último, escribamos el elemento de volumen $dV = |\epsilon_{ijk}\, dr_i dr_j dr_k|$, con el símbolo de Levi Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es } (1,2,3), (2,3,1) \text{ o } (3,1,2) \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ es } (3,2,1), (1,3,2) \text{ o } (2,1,3) \\ 0 & \text{de otro modo } i=j \text{ o } j=k \text{ o } k=i \end{cases}$$

y veamos el Jacobiano para una rotación:

$$\begin{aligned} dV' &= |\epsilon_{ijk}\, dr'_i dr'_j \overbrace{dr'_k}^{R_{kn}dr_n}| \\ &= |\overbrace{\epsilon_{ijk} R_{il} R_{lm} R_{kn}}^{\epsilon_{lmn}\,\det\mathbf{R}}\, dr_l dr_m dr_n| \\ &= |\det\mathbf{R}\,| dV\,, \end{aligned}$$

es decir $J_R = |\det\mathbf{R}| = 1$, y recuperamos la rotación de las densidades que habíamos escrito antes. En el caso de una traslación, $J_T = 1$, y como las velocidades originales y trasladadas son las mismas ($\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt = d\mathbf{r}/dt = d\mathbf{v}$), recuperamos $\mathbf{j}'(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}-\mathbf{a})$.

Reflexión: R. Definimos reflexiones ante un plano en el espacio como las transformaciones sobre vectores que a un punto arbitrario $\mathbf{r}$ lo llevan al punto simétrico respecto al plano. En general (y para simplificar), usamos planos que contienen al origen (inversiones).

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r}$$

Ejemplo: En coordenadas cartesianas,

$$\overbrace{\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{\text{reflexión ante el plano } z=0} \quad , \qquad \begin{array}{lccc} \mathbf{r} & = (x,y,z)^t & = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ \mathbf{r}' & = \quad \mathbf{R}\mathbf{r} & = x\hat{x} + y\hat{y} - z\hat{z} \end{array}$$

propiedades:

- Ortogonal: $\mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathbf{t}} = \mathbf{R}^{\mathbf{t}}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R} = \mathbf{1}$ (la traspuesta es la inversa y ella misma).
- Determinante: det $\mathbf{R} = -1$
  (no están conctadas mediante la identidad)
- isométrica: $|\mathbf{R}\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|$ (preserva la distancia al origen).

Las fuentes reflejadas mediante $\mathbf{R}$ son:

$$\rho'(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})$$

$$\mathbf{j}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\,\mathbf{j}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})$$

Transformaciones de los campos E y B

Acabamos de ver cómo se relacionan las fuentes transformadas con las fuentes originales. Ahora buscamos la relación entre los campos E' y B', de las fuentes transformadas, y los campos originales ($\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, con fuentes sin transformar). Por un lado, los campos son magnitudes físicas que aparecen en las ecuaciones de Maxwell con un rol aparentemente intrincado detrás de operadores diferenciales y, por otro lado, también los encontramos en la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$$

que siente una partícula de prueba con carga q y velocidad $\mathbf{v}$. Para respondernos la pregunta

¿cómo transforman los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$?

podemos plantear la respuesta desde las ecuaciones de Maxwell, o desde la fuerza de Lorentz. En lo que sigue, además de responder a la pregunta anterior, vamos a chequear que ambas estrategias sean compatibles yendo por un camino o por el otro, a modo de ganar intuición física y matemática sobre éstos objetos (los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$). En resumen las estrategias serán:

1. Aplicar las ecuaciones de Maxwell en la configuración original y en la configuración transformada, usar la relación de transformación de las nuevas fuentes y las originales, para luego obtener cómo son los campos $\mathbf{E}'(\mathbf{E})$ y $\mathbf{B}'(\mathbf{B})$; en función de los campos originales.
2. Inferir cómo deben transformar los campos eléctrico y magnético a partir de las propiedades físicas y geométricas que se pueden leer en la forma en que éstos participan en la fuerza de Lorentz, y luego verificar que las transformaciones encontradas sean compatibles con las ecuaciones de Maxwell.

Transformaciones del campo eléctrostático $\mathbf{E}$

$$\text{configuración original de la fuente y el campo:} \left[\begin{array}{lcl} \nabla\cdot\mathbf{E} &=& 4\pi\rho \\ \nabla\times\mathbf{E} &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\text{configuración transformada de la fuente y el campo:} \left[\begin{array}{lcl} \nabla\cdot\mathbf{E}' &=& 4\pi\rho' \\ \nabla\times\mathbf{E}' &=& 0 \end{array}\right.$$

Traslaciones de E. Apliquemos el primer método para encontrar cómo se trasladan los campos eléctricos. En el sistema que ha sido transformado mediante una traslación de las fuentes, tenemos, de la ecuación de la divergencia:

$$\left[\nabla\cdot\mathbf{E}'\right](\mathbf{r}) = 4\pi\rho'(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}-\mathbf{a}) \tag{1}$$

Reservamos el uso de los **paréntesis** para hacer **explícito en dónde está evaluada** la expresión (función u operación). Por otra parte, en la configuración original, tenemos

$$\left[\nabla\cdot\mathbf{E}\right](\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad \xrightarrow{\text{cambio punto campo}} \quad \left[\nabla\cdot\mathbf{E}\right](\mathbf{r}-\mathbf{a}) = \mathbf{4}\pi\rho(\mathbf{r}-\mathbf{a}) \tag{2}$$

Las expresiones de arriba tienen el mismo lado derecho de la igualdad, pero del lado izquierdo se encuentran evaluadas en diferentes puntos. Para continuar, veamos el siguiente cálculo auxiliar.

<u>cálculo auxiliar</u> (I): ‘Derivada’ de un campo vectorial compuesto con una función $\mathbf{f}$. Escribimos la composición: $(\mathbf{E}\circ\mathbf{f})(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{f})$.
Caso del operador gradiente en cartesianas. Operemos para obtener la divergencia de la composición de la siguiente manera,

$$[\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{f})] = \partial_i[\mathbf{E}(\mathbf{f})]_i = [\partial_j E_i](\mathbf{f})\ \partial_i f_j \tag{3}$$

donde $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial r_i}$.

Traslación: $\mathbf{f}\equiv\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}-\mathbf{a}$, entoncs tenemos $\partial_i f_j = \delta_{ij}$ y, de (3),

$$[\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{a})] = [\partial_i E_i](\mathbf{r}-\mathbf{a}) = [\nabla\cdot\mathbf{E}](\mathbf{r}-\mathbf{a})\,.$$

Usando esto último en (1) y en (2) se obtiene,

$$[\nabla\cdot\mathbf{E}'(\mathbf{r})] \;=\; [\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{a})] \implies \nabla\cdot[\mathbf{E}'(\mathbf{r})-\mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{a})] = 0\,,$$

$\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{a})$ satisfacen la misma ecuación para su divergencia, y además, operando análogamente a (3) para la ecuación del rotor,

$$[\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \;\; = \;\; [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{a})] = 0 \implies \nabla \times [\mathbf{E}'(\mathbf{r}) - \mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{a})] = 0\,,$$

Se puede sumar una constante a la variable antes o después de operar linealmente con las derivadas, ya sea una operación $(\nabla\cdot)$, o la otra $(\nabla\times)$.

Hemos demostrado, mediante la aplicación de las ecuaciones de Maxwell, que $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{a})$ satisfacen las mismas ecuaciones para su rotor y su divergencia. Dicho de otra manera, para encuadrarlo en el teorema de Helmholtz, definiendo $\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}'(\mathbf{r}) - \mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{a})$, y pidiendo las condiciones de decaimineto para el campo en el infinito que nos garanticen unicidad, tenemos que $\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, esto es

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{a})$$

El campo eléctrico se traslada rígidamente con las fuentes. Este resultado resulta por demás familiar, de Física 3, y de la vida... Nos suena natural ya que sabemos que $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ en electrostática, y porque asumimos que el *espacio es homogéneo*; si trasladamos el sistema eléctrico, esperamos que el experimento trasladado (donde se manifiestan las interacciones con fuerzas eléctricas) tenga el mismo resultado que el original. Acabamos de demostrar, y de formular con argumentos físicos razonables, que *las ecuaciones electrostáticas respetan la homogeneidad del espacio*. Todo esto lo pudimos haber dicho desde un principio si asumíamos, o recordábamos, que el campo eléctrico es un vector (pues la fuerza sobre q es un vector: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, y la carga puntual es invariante ante una traslación). Los vectores tienen transformaciones bien definidas, entre ellas las traslaciones. Los vectores se trasladan rígidamente como en la ecuación de arriba, igual a lo que ya habíamos definido para el vector densidad de corriente.

Rotaciones de $\mathbf{E}$. Podemos pensar análogamente a lo que comentamos arriba, y usar el postulado de la *isotropía del espacio*, esto es: la rotación de las fuentes en el espacio cambia del mismo modo los resultados del experimento. Precisamente, la fuerza que es un vector debe transformar como tal: $\mathbf{F}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{F}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})$. En términos del campo eléctrico, esperamos que

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \tag{4}$$

Aplicamos entonces la segunda estrategia de las mencionados al principio de esta sección. Utilizamos el siguiente argumento: Si las ecuaciones de Maxwell son isótropas deben ser satisfechas por el campo $\mathbf{E}'$ (rotado) y las fuentes ρ' (rotadas). Finalmente, argumentando unicidad, concluiremos que los campos rotados son la *única* solución a las ecuaciones de Maxwell del sistema rotado.

Para corroborar que las ecuaciones respetan la isotropía del espacio, veamos que el campo rotado es compatible y satisface las ecuaciones de Maxwell electrostáticas:

$$\text{configuración original:} \left[\begin{array}{rcl} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) & = & 4\pi\rho(\mathbf{r}) \qquad \rightarrow \qquad [\nabla\cdot\mathbf{E}](\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{configuración transformada:} \left[\begin{array}{rcl} \nabla \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{r}) & = & 4\pi\rho'(\mathbf{r}) \;\; = 4\pi\rho(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}) & = & 0 \end{array} \right.$$

Miramos primero la ecuación de la divergencia. Después de cambiar el punto de observación en el sistema original, tenemos que el lado derecho es el mismo en ambos sistemas, por lo tanto, hay que chequear la igualdad del lado izquierdo. El campo eléctrico es un vector y ante rotaciones debe ser $\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R^{-1}r})$, entonces lo que queremos ver es que:

$$[\nabla \cdot \overbrace{\mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})}^{\mathbf{E}'(\mathbf{r})}] = [\nabla \cdot \mathbf{E}](\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \tag{5}$$

<u>cálculo auxiliar</u> (II):

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) &= \partial_i [\mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})]_i \\
&= \underbrace{[\partial_j [\mathbf{R}\mathbf{E}]_i}_{R_{ik}\partial_j E_k}](\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \qquad \underbrace{\partial_i [\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}]_j}_{R^{-1}_{jk}\,\partial_i r_k = R^{-1}_{jk}\,\delta_{ik}} \\
&= R^{-1}_{ji} R_{ik}\,[\partial_j E_k](\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \\
&= [\partial_j E_j](\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \\
&= [\nabla \cdot \mathbf{E}](\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})
\end{aligned}$$

La rotación del campo $\mathbf{E}$ como un vector, satisface la ecuación de la divergencia de la configuración transformada.

Veamos qué pasa con la ecuación del rotor. Recordemos que con el símbolo de Levi Civita se pueden escribir las siguientes operaciones en notación de índices:

$$\text{producto vectorial: } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \;\rightarrow\quad c_k = \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j$$

$$\text{rotor: } \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \;\rightarrow\quad C_k = \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\partial_i A_j$$

Las ecuaciones electrostáticas de ambos sistemas, tienen los rotores igualados a cero. Si el campo rotado es $\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})$, entonces queremos ver que:

$$\underbrace{[\nabla \times \mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})]}_{=\nabla \times \mathbf{E}'(\mathbf{r})} = 0$$

calculo auxiliar (III):

$$
\begin{aligned}
[\nabla \times \mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})]_k &= \epsilon_{ijk}\, \partial_i [\mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})]_j \\
&= \epsilon_{ijk}\, \underbrace{[\partial_m [\mathbf{R}\mathbf{E}]_j]}_{R_{jl}\partial_m E_l}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \qquad \underbrace{\partial_i [\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}]_m}_{R^{-1}_{mn}\,\partial_i r_n = R^{-1}_{mn}\,\delta_{in}} \\
&= \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{R_{kn}R_{hn}\epsilon_{ijh}} \quad \overbrace{R^{-1}_{mi}}^{R_{im}}\, R_{jl}\, [\partial_m E_l](\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \\
&= R_{kn}\, \underbrace{\epsilon_{ijh}\, R_{im} R_{jl} R_{hn}}_{\epsilon_{mln}\, \det \mathbf{R}}\, [\partial_m E_l](\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \\
&= \det \mathbf{R}\; R_{kn}\; \epsilon_{mln} [\partial_m E_l](\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \\
&= \det \mathbf{R}\; [\mathbf{R}\, \underbrace{[\nabla \times \mathbf{E}]}_{=0}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})]_k = 0
\end{aligned}
$$

Acabamos de ver que la rotación aplicada al campo vectorial $\mathbf{E}$, como en (4), satisface las ecuaciones de Maxwell electrostáticas de la configuración rotada. Bajo las hipótesis que garantizan unicidad, $\mathbf{E}'$ es *la* solución en el sistema rotado. Como corolario, estamos corroborando que *las ecuaciones de Maxwell electrostáticas respetan la isotropía del espacio*.

Dos observaciones:
(i) la divergencia del campo vectorial rotado $\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})$ se comporta como un campo escalar, es decir, la operación $\nabla \cdot \mathbf{E}$ es un producto escalar entre vectores.
(ii) el cálculo auxiliar (III) muestra cómo transforma ante una rotación el rotor de un campo cualquiera que transforme de ese modo ante rotaciones. La única propiedad que usamos es que la inversa de $\mathbf{R}$ es su transpuesta.

Reflexiones de $\mathbf{E}$. La fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ implica que ante una reflexión $\mathbf{R}$ de las fuentes, $\mathbf{E}$ debe transformar como un vector,

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})\,.$$

Podemos demostrar que el campo reflejado satisface las ecuaciones de Maxwell electrostáticas para las fuentes reflejadas de la misma manera (siguiendo exactamente los mismos pasos) que hicimos anteriormente en el caso de las rotaciones, ¿Por qué?. De este modo, vemos que las *leyes de la electrostática son invariantes frente a transformaciones de paridad*.

Transformaciones del campo magnetostático B

Queremos ver cómo transforma el campo ante traslaciones, rotaciones y reflexiones y corroborar que las ecuaciones de Maxwell estáticas son consistentes con las leyes de transformación, respetando homogeneidad, isotropía y paridad.

Traslaciones de B. Ante una traslación de las fuentes, la homogeneidad del espacio implica que las fuerzas deben trasladarse rígidamente. La fuerza magnética es $\mathbf{F} = \frac{q}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, y en términos del campo $\mathbf{B}$, tenemos que

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}-\mathbf{a})\,.$$

Realizando las mismas operaciones que hicimos para las traslaciones de $\mathbf{E}$, podemos demostrar que el campo $\mathbf{B}'$ satisface las ecuaciones de Maxwell para las fuentes transformadas:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{B}'(\mathbf{r}) &= 0\\ \nabla\times\mathbf{B}'(\mathbf{r}) &= \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}'(\mathbf{r})\end{aligned}$$

Rotaciones de B. Ante una rotación de las fuentes, la isotropía del espacio implica que las fuerzas deben rotarse vectorialmente: $\mathbf{F}' = \mathbf{R}\mathbf{F}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})$. En términos del campo magnético, tenemos

$$\mathbf{v}'\times\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{v}\times\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})]$$

<u>auxiliar</u> (IV): operando análogamente al cálculo auxiliar (III) se puede demostrar que,

$$\mathbf{R}[\mathbf{A}\times\mathbf{B}] = \det\mathbf{R}\,[\mathbf{R}\mathbf{A}]\times[\mathbf{R}\mathbf{B}]$$

Por lo que,

$$\mathbf{R}\mathbf{v}\times\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \det\mathbf{R}\;\mathbf{R}\mathbf{v}\times[\mathbf{R}\mathbf{B}](\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})]$$

y como el vector velocidad es arbitrario, obtenemos

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \det\mathbf{R}\;\mathbf{R}\mathbf{B}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})\,.$$

Esto indica que para el campo de las fuentes rotadas es la rotación del campo de las fuentes originales, evaluado en el punto antitransformado y multiplicado por el determinante de la transformación. Como $\det\mathbf{R} = 1$ para rotaciones, obtuvimos que $\mathbf{B}$ rota igual que un vector. Queda como ejercicio demostrar que el campo $\mathbf{B}'$ satisface las ecuaciones de Maxwell para las fuentes transformadas,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{B}'(\mathbf{r}) &= 0\\ \nabla\times\mathbf{B}'(\mathbf{r}) &= \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}'(\mathbf{r})\end{aligned}$$

Consecuentemente, las ecuaciones magnetostáticas respetan la isotropía del espacio.

Reflexiones de B. Ante una reflexión de las fuentes, la paridad del espacio implica que las fuerzas deben reflejarse. La reflexión de $\mathbf{B}$ se obtiene análogamente al caso de la rotación. Como el determinante de la matriz de una reflexión es menos 1, para el campo magnético obtenemos

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = \det\mathbf{R}\;\mathbf{R}\mathbf{B}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) = -\,\mathbf{R}\mathbf{B}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})\,.$$

Debido al cambio de signo global, ante una reflexión del objeto geométrico $\mathbf{B}$, al campo magnético se lo denomina pseudovector.

Transformaciones de simetría

Una transformación de simetría es aquella que deja invariante las fuentes. Si las fuentes originales y las transformadas son indistinguibles, esperamos que los experimentos también lo sean. En términos de las leyes del electromagnetismo, esto implica que

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}\,, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}$$

donde la igualdad de cada campo se desprende de cómo aparecen involucrados en la fuerza de Lorentz. A partir de las leyes de transformación que hemos deducido, vemos que una transformación de simetría fija condiciones sobre los campos, $\mathbf{E}'(\mathbf{E}) = \mathbf{E}$ y $\mathbf{B}'(\mathbf{B}) = \mathbf{B}$, a partir de las cuales podemos inferir propiedades como la depedencia funcional con las coordenadas y/o las direcciones en el espacio. A continuación planteamos éstas condiciones explícitamente.

Simetría de traslación: (vale lo mismo para $\mathbf{E}$ que para $\mathbf{B}$)

$$\underbrace{\mathbf{E}(\mathbf{r}) =}_{\text{simetría}} \overbrace{\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}-\mathbf{a})}^{\text{traslación}}$$

Ejemplo: invariancia ante traslaciones continuas según el eje x. Como es continua, el vector que la representa puede ser infinitesimal, $\mathbf{a} = \delta\hat{\mathbf{x}}$, y entonces

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}-\delta\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \xrightarrow{\text{Taylor}} \quad \hat{\mathbf{x}}\cdot\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(y,z)$$

Simetría de rotación: (vale lo mismo para $\mathbf{E}$ que para $\mathbf{B}$)

$$\underbrace{\mathbf{E}(\mathbf{r}) =}_{\text{simetría}} \overbrace{\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})}^{\text{rotación}}$$

Ejemplo: invariancia ante rotaciones continuas según el eje z. En coordenadas cilíndricas (ρ,φ,z), una rotación $\mathbf{R} = \mathbf{R}(z,\gamma)$, en un ángulo γ, transforma: $(\rho,\varphi,z) \to (\rho,\varphi+\gamma,z)$. Por ejemplo, para el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_\rho(\rho,\varphi,z)\hat{\rho}(\varphi) + E_\varphi(\rho,\varphi,z)\hat{\varphi}(\varphi) + E_z(\rho,\varphi,z)\hat{z}\,,$$

obtenemos un campo rotado dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) \;&=\; \mathbf{R}[E_\rho(\rho,\varphi-\gamma,z)\,\hat{\rho}(\varphi-\gamma) + E_\varphi(\rho,\varphi-\gamma,z)\,\hat{\varphi}(\varphi-\gamma) + E_z(\rho,\varphi-\gamma,z)\,\hat{z}] \\ &=\; E_\rho(\rho,\varphi-\gamma,z)\,\underbrace{\mathbf{R}\hat{\rho}(\varphi-\gamma)}_{\hat{\rho}(\varphi)} + E_\varphi(\rho,\varphi-\gamma,z)\,\underbrace{\mathbf{R}\hat{\varphi}(\varphi-\gamma)}_{\hat{\varphi}(\varphi)} + E_z(\rho,\varphi-\gamma,z)\,\underbrace{\mathbf{R}\hat{z}}_{\hat{z}}\,.\end{aligned}$$

La simetría de rotación ante $\mathbf{R}(z,\gamma)$, con ángulo γ arbitrario, nos garantiza que $\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$. Como obtuvimos los mismos versores para ambas expresiones, podemos igualar término a término para ver que las componentes del campo son independientes de la coordenada angular (φ):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_\rho(\rho,z)\hat{\rho}(\varphi) + E_\varphi(\rho,z)\hat{\varphi}(\varphi) + E_z(\rho,z)\hat{z}\,.$$

En particular, sobre el eje de rotación vale: $\mathbf{R}\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Longrightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r} = z\hat{z}) = E_z(z)\hat{z}\,.$

Simetría de reflexión:

$$\underbrace{\mathbf{E}(\mathbf{r})}_{\text{simetría}} = \overbrace{\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})}^{\text{reflexión}}$$

$$\underbrace{\mathbf{B}(\mathbf{r})}_{\text{simetría}} = \overbrace{\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = -\mathbf{R}\mathbf{B}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})}^{\text{reflexión}}$$

Ejemplo: invariancia ante reflexión respecto de el plano $z = 0$.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_\rho(\rho,\varphi,z)\hat{\rho}(\varphi) + E_\varphi(\rho,\varphi,z)\hat{\varphi}(\varphi) + E_z(\rho,\varphi,z)\hat{z}\,,$$

obtenemos un campo rotado dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{E}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}) &= \mathbf{R}[E_\rho(\rho,\varphi,-z)\,\hat{\rho}(\varphi) + E_\varphi(\rho,\varphi,-z)\,\hat{\varphi}(\varphi) + E_z(\rho,\varphi,-z)\,\hat{z}] \\ &= E_\rho(\rho,\varphi,-z)\,\underbrace{\mathbf{R}\hat{\rho}(\varphi)}_{\hat{\rho}(\varphi)} + E_\varphi(\rho,\varphi,-z)\,\underbrace{\mathbf{R}\hat{\varphi}(\varphi)}_{\hat{\varphi}(\varphi)} + E_z(\rho,\varphi,-z)\,\underbrace{\mathbf{R}\hat{z}}_{-\hat{z}}\,.\end{aligned}$$

La simetría de reflexión nos garantiza que $\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$. Podemos igualar término a término para ver que las componentes del campo satisfacen la siguiente condición:

$$E_\rho(\rho,\varphi,z) = E_\rho(\rho,\varphi,-z)\,,\quad E_\varphi(\rho,\varphi,z) = E_\varphi(\rho,\varphi,-z)\,,\quad E_z(\rho,\varphi,z) = -E_z(\rho,\varphi,-z)$$

En particular, sobre el plano de simetría: $\mathbf{R}\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Longrightarrow E_z = 0$: el campo eléctrico no tiene componente perpendicular sobre el plano de simetría (a lo sumo, será paralelo).

La reflexión del campo magnético difiere en un signo global respecto a la del eléctrico: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mathbf{R}\mathbf{B}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})$. Para $\mathbf{B}$ escrito en cilíndricas tenemos

$$B_\rho(\rho,\varphi,z) = -B_\rho(\rho,\varphi,-z)\,,\quad B_\varphi(\rho,\varphi,z) = -B_\varphi(\rho,\varphi,-z)\,,\quad B_z(\rho,\varphi,z) = B_z(\rho,\varphi,-z)\,,$$

En particular, sobre el plano, el campo magnético no tiene componente paralela al plano de simetría (a lo sumo es perpendicular).