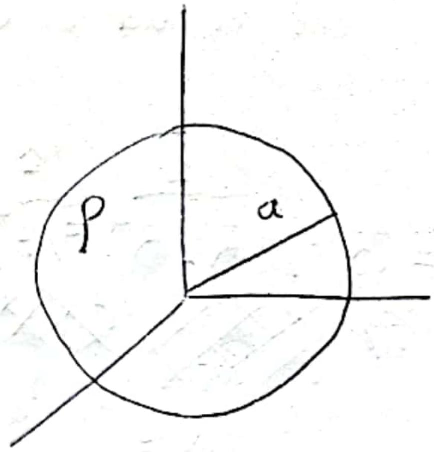
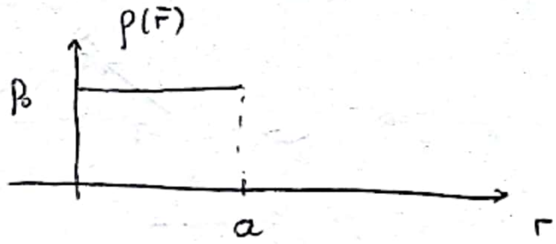
P1) (a)



$$\rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

$$\rho_0(\bar{r}) = \begin{cases} \rho_0 , & \text{si } r \le a \\ 0 , & \text{si } r > a \end{cases}$$



$$\underbrace{\rho(\bar{r})} = \rho_0 \cdot \Theta(-r + a)$$

$\rho(r)$: sólo depende de la dist. al origen

i) simetría esférica : $\left[\rho'(\bar{r}) = \rho(R^{-1}\bar{r}) = \rho(r) \right]$

rotación (por cualquier eje que pase por el origen)

reflexion (" " plano " " " " ")

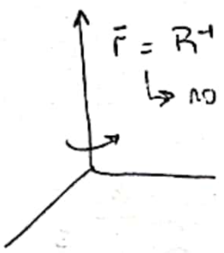
rotación R : $\underbrace{\vec{E}'(\bar{r})} = R\vec{E}(R^{-1}\bar{r})$

por sim. $= \bar{E}(\bar{r})$

sugerencia: hagan la siguiente demostración con un dibujo (y nada mas)

usamos una R sobre el eje definido por $\bar{r}$ (al punto campo, cualquiera) $\Rightarrow$ $R^{-1} \cdot \bar{r} = \bar{r}$

R: rot. sobre eje (z): vertical $\updownarrow$ $\bar{E}$ $\quad \vec{E}(\bar{r}) = R\,\vec{E}(\bar{r})$: sólo compatible si $\bar{E}$ no cambia dirección



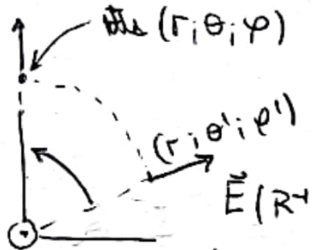
$\bar{r} = R^{-1}\bar{r}$
↳ no cambia si $\hat{z} = \hat{r}$

$\Downarrow$

$$\vec{E}(\bar{r}) = E(\bar{r}).\,\hat{r}$$

Ahora usamos R arbitraria: $\underbrace{\vec{E}(\bar{r})}_{\vec{E}(\bar{r}).\,\hat{r}} = R\,\vec{E}(R^{-1}.\bar{r}) = \circledast$

$\bar{E}(\bar{r}) = \vec{E}'(\bar{r})$:



$\underbrace{\vec{E}(R^{-1}\bar{r})}$ $\qquad \left(\hat{r} = \dfrac{\bar{r}}{r}\right)$

su dirección es $\dfrac{R^{-1}.\bar{r}}{|R^{-1}\bar{r}|} = \dfrac{R^{-1}.\bar{r}}{r}$

$$\circledast = E(R^{-1}.\bar{r}).\,R\left[\frac{R^{-1}.\bar{r}}{r}\right]$$

$= E(R^{-1}\bar{r}).\,\hat{r}$: como la rot. es arbitraria no puede depender de θ ni φ.

$\therefore$ $\boxed{\vec{E}(\bar{r}) = E(r).\,\hat{r}}$

(ii) $\displaystyle\oiint_{\partial V = S} \vec{E}(\bar{r}).\,d\bar{S} = 4\pi \underbrace{\iiint_V dV.\,\rho(\bar{r})}_{\text{carga encerrada en } V}$: útil para calcular un promedio del campo

$\Rightarrow$ elijo una superficie de gauss ∂V / el campo tome el mismo valor en todo punto de la superficie y así poder calcular el campo punto a punto: $\partial V = S$: esferas centrada en el origen

$$\underset{\partial[\text{esf}(r)]}{\oiint} E(\bar{r}) \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{dS\cdot\hat{n}} = E(r) \oiint \hat{r}\cdot\hat{r}\, dS = E(r) \cdot 4\pi \cdot r^2$$

$\hat{n} = \hat{r}$

$dS.\hat{n}$ ↓ normal exterior a la sup.

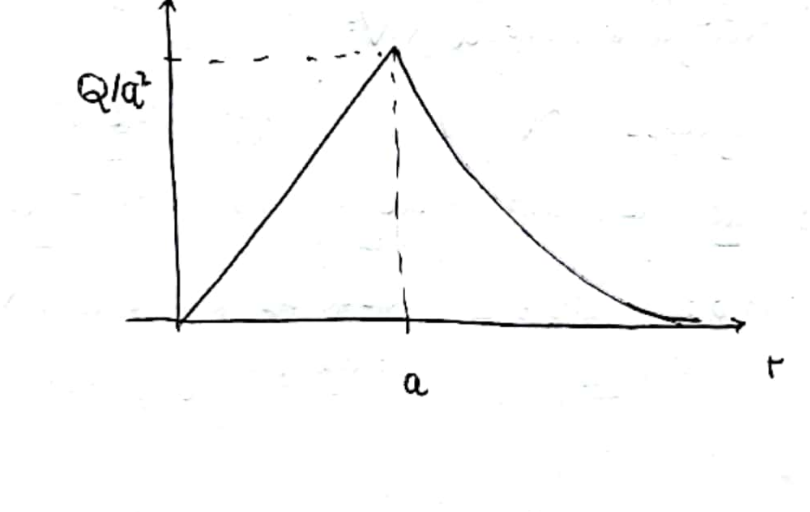
$$4\pi \underset{\Theta^r}{\iiint} \rho(r)\, dV = 4\pi \cdot Q(r) \quad ; \quad \rho_0(r) = \begin{cases} \overbrace{Q/\tfrac{4}{3}\pi a^3}^{\rho_0} & \text{si } r \leq a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

si $r \geq a$: $Q(r) = Q(a) \equiv Q$

si $r \leq a$: $Q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{r^3}{a^3} Q$

$$\therefore \quad \vec{E}(\bar{r}) = \hat{r} \cdot \begin{cases} \frac{r}{a^3} Q & , \text{ si } r \leq a \\ \frac{Q}{r^2} & , \text{ si } r \geq a \end{cases}$$

El campo es continuo sobre la esfera $r = a$ (no hay carga superficial).



Escaneado con CamScanner

iii) $$\phi(r) = -\int_{\underbrace{r_0}_{\text{punto de ref.}}}^{r} \bar{E}(\bar{r}) \cdot d\bar{l} + \underbrace{\phi(r_0)}_{\text{pot. de ref.}}$$

- integral de línea • Indep. del camino (campo conservativo)
- r_0 arbitrario si no hay patologías y la integral queda bien definida.

▷ Como es radial sólo importan los desplazamientos radiales (r = cte son equipotenciales)

$$\phi(\bar{r}) = -\int_{r_0=\infty}^{r} E(r)\,\hat{r}\,(dr \cdot \hat{r}) + \underbrace{\phi(r_0)}_{=0}$$

$= 0$: si el campo decae $\sim \frac{1}{r^{\varepsilon}}$, $\varepsilon > 1$, puedo elegir $\phi(\infty) = 0$

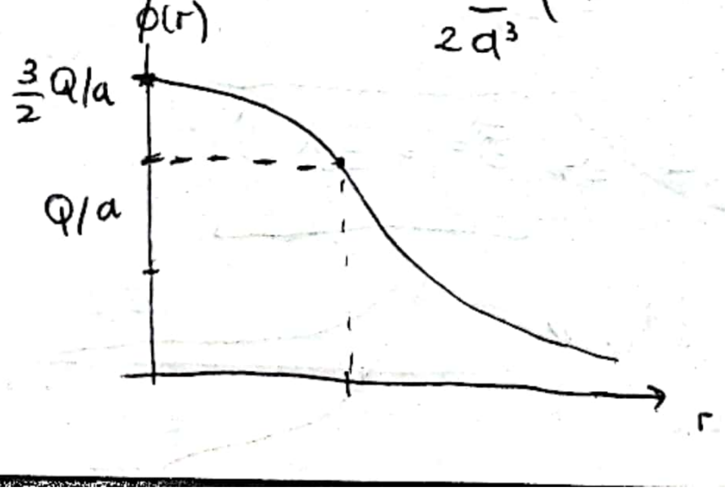
$$= \int_{r}^{\infty} E(r) \cdot dr$$

Si $r \geq a$: $\phi(r \geq a) = \int_{r}^{\infty} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{r}$

Si $r < a$: $\phi(r<a) = \underbrace{\int_{r}^{a} dr \cdot \frac{rQ}{a^3}}_{\frac{Q}{2a^3}(a^2 - r^2)} + \underbrace{\int_{a}^{\infty} \frac{Q}{r^2} dr}_{Q/a} = \frac{Q}{a} + \frac{Q}{2a}\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)$

$$= \frac{3}{2}\frac{Q}{a} - \frac{Q}{2a^3} \cdot r^2$$

$$= \frac{Q}{2a}\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$



P1) d)

$$\rho_\lambda(\bar r) = \lambda\,\delta(x)\,\delta(y)$$

$$\left[\rho'_\lambda(r) = \lambda\,\delta(\bar t(x))\,\delta(\bar t(y))\right]$$

(i)

Simetrías: rotación eje z. [2]

(cilíndrica) (rotaciones discretas en π por ejes $\perp$ a z)

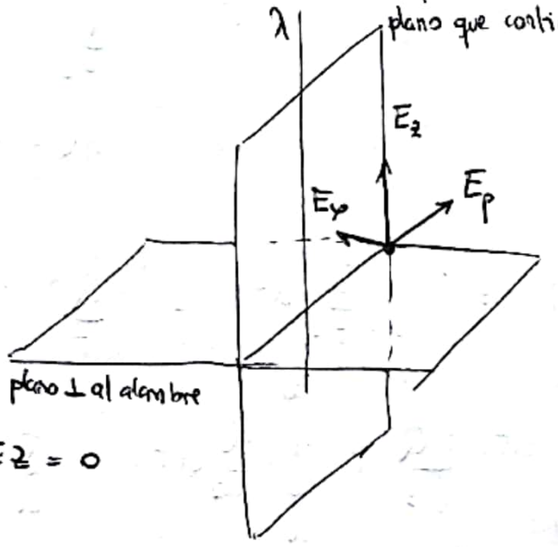
reflexión, planos $\perp$ a eje z y que lo contengan: [3]

traslación en dir. z. [1]

Por [1],[2]: $\vec E(\bar r) = \vec E(\rho)$; ρ : coordenada radial de cilíndricas

usando [3]:

reflexion: plano que contiene alambre $\Rightarrow E_\varphi = 0$



$$\boxed{\bar E(\bar r) = E(\rho)\cdot\hat\rho}$$

reflex: plano $\perp$ al alambre

$\Rightarrow E_z = 0$

(ii) $$\oiint \bar E(\bar r)\cdot d\bar S = \underbrace{\iint}_{\text{lateral}} E(\rho)\cdot\cancel{\hat\rho}\,(\cancel{\hat\rho}\,dS) + \underbrace{\iint}_{\text{tapas}} \overbrace{E(\rho)\,\hat\rho\cdot(\hat n\,dS)}^{=0} = E(\rho)\,2\pi\cdot\rho\cdot L$$

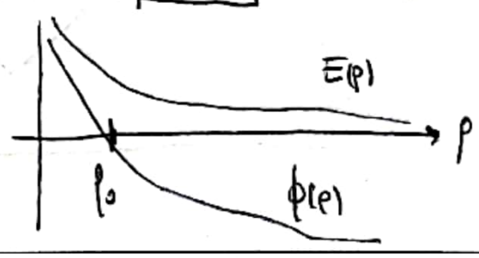

: sup. de cilindro

$$4\pi\iiint \rho_\lambda(\bar r)\,dV = 4\pi\int\lambda\cdot dz = \lambda L\cdot 4\pi \Rightarrow \boxed{\bar E(\bar r) = \frac{2\cdot\lambda}{\rho}\cdot\hat\rho}$$

(iii) $$\phi(\bar r) = -\int_{r_0}^{r}\bar E(\bar r)\,d\bar l + \phi(r_0) = -\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{2\lambda}{\rho}\cdot\cancel{\hat\rho}\,(\cancel{\hat\rho}\,d\rho)$$

$$= -2\lambda\ln(\rho/\rho_0)$$

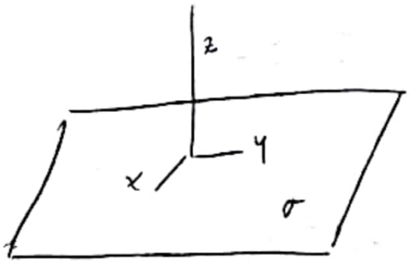
ρ_0: arbitrario en $(0;\infty)$ (para estar bien def.)



Escaneado con CamScanner

P1) c)

Plano infinito con σ uniforme



plano $z=0$

$$\sigma = \frac{\delta q}{\delta a}$$

$$\rho_\sigma = \sigma \cdot \delta(z) \quad \Big/ \quad Q = \int \rho \, dV = \int \rho(r) \underbrace{d^3 r}_{dx\,dy\,dz}$$

$$= \int \sigma \, dx\,dy = \sigma \cdot A$$

(i) Simetrías:

trasl. x, y

rot. eje $\perp$ al plano

ref. plano

ref. $\underbrace{\text{plano}}_{\text{cualquier}}$ $\perp$ al plano σ

Además, con plano de ref. // a plano σ:

$$\vec{E}'(z) = \underbrace{R}\,\vec{E}(\underbrace{R\,\bar{r}}) = -E(-z\hat{z})\cdot\hat{z}$$

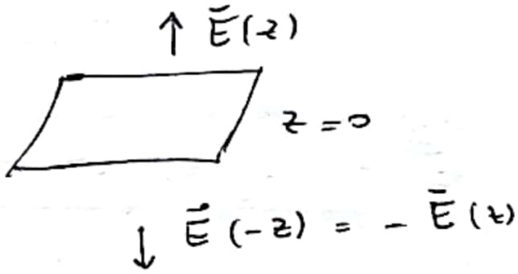
$$R\cdot z\hat{z} = z(-\hat{z})$$

$$\downarrow$$

$$R\,E\,\hat{z} = E(-\hat{z})$$

como es sim $\Rightarrow$ $\vec{E}'(z) = E'(z)\,\hat{z} = E(z)\,\hat{z}$

$\therefore$ $\boxed{E(z) = -E(-z)}$ función impar

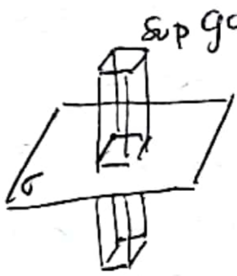


$\boxed{\text{Obs. } E(z=0) = -E(0) = 0}$

(ii)

Ley de gauss: $\oiint \vec{E}\cdot d\bar{S} = 4\pi\, \underbrace{Q_{enc}}$

$$S = \partial V \qquad \iiint_V \rho\, dV$$



$$Q_{enc} = \iint \sigma\, dS = \sigma.\,A$$

Elijo S / $\bar{E}$ sea // o $\perp$ a sus bordes (tapas y laterales)

$$\oiint \bar{E}\,d\bar{S} = \underbrace{\iint_{tapa_+(z>0)} \overbrace{\bar{E}\cdot d\bar{S}}^{E(z).\,dS}} + \int_{tapa_-(z<0)} \bar{E}\,d\bar{S} + \int_{laterales} \bar{E}\,d\bar{S} =$$

$d\bar{S} = dS.\,\hat{n}$ $\Rightarrow$ $\circ$ $d\bar{S}_{lat} = dS.\,\hat{n}$ con $\hat{n} = \hat{x}$ o $\hat{y}$ $\therefore$ $\bar{E}\,d\bar{S}_{lat} = 0$

$\downarrow$

normal exterior $\qquad$ $\circ$ $d\bar{S}_{tapa\pm} = \pm\, dS_{tapa}\cdot\hat{z}$

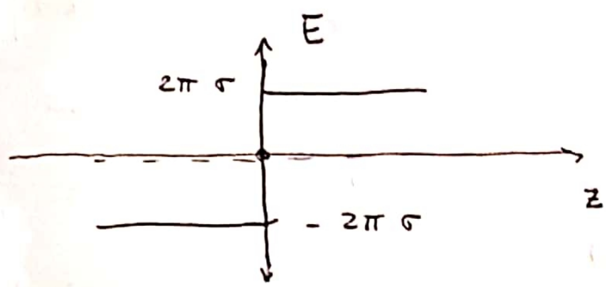
$$= E(z_+>0).\,A - E(z_-<0)\,A = \sigma\, A\, 4\pi \quad , \forall\, z_+, z_-$$

• $\forall z_+ > 0$, $\forall z_- < 0$ $\Rightarrow$ indep. z_+ y z_-

$$\therefore \boxed{\vec{E}(\vec r) = E(\text{signo}(z))\cdot \hat z}$$

• $$E(z>0) - \underbrace{E(z<0)}_{-E(z>0)} = 4\pi\sigma \quad \Rightarrow \quad E(z) = sg(z)\cdot 2\pi\sigma$$

$$\boxed{\vec E = sg(z)\cdot 2\pi\sigma\cdot \hat z}$$



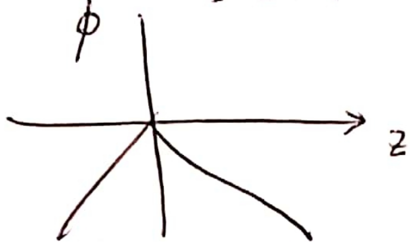
(iii) $$\boxed{\phi(r)} = -\int_{\vec r_{refe}}^{\vec r} \vec E\, d\vec r + \phi(r_{refe})$$; refe: algun plano equip. a z cte: Elijo

$\Rightarrow$ $\phi(z=0) = 0$: para que sea sim. (y finito)

$$= -\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} E(z)\cdot \cancel{\hat z}\,(dz\,\cancel{\hat z})$$

$(0,0,0)$ = x, y, z

$$= -2\pi\sigma \cdot \int_{z_{eq}=0}^{z} dz\cdot sg(z) = -2\pi\sigma\, sg(z)\cdot z = \boxed{-2\pi\sigma|z|}$$



Obs.

$\varepsilon \to 0$; $\varepsilon \to 0$: $$\oint_{\delta A} \vec E\cdot d\vec S \underset{\varepsilon\to 0}{=} \boxed{(\vec E_2 - \vec E_1)\cdot \hat n = 4\pi\sigma}$$: salto comp. normal del campo.

$\hat n_2 = \hat n$

$\hat n_1 = -\hat n$

$$\vec E_2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \vec E(\vec r + \varepsilon \hat n)$$

$$\vec E_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \vec E(\vec r - \varepsilon \hat n)$$